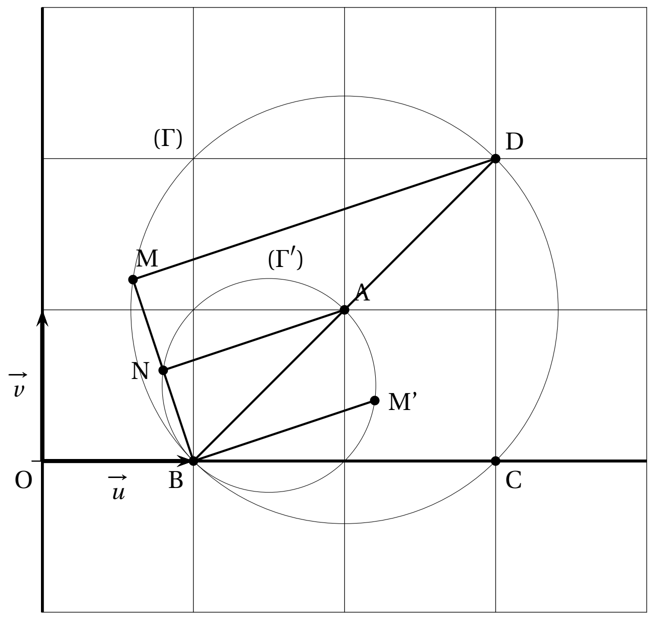
∽ Corrigé du Baccalauréat S Amérique du Nord ∾ mai 2008

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1.



2. a. 1 et 3 sont deux nombres réels, donc B d'affixe 1 et C d'affixe 3 sont deux points de l'axe $\left(O ; \vec{u}\right)$.

De plus B∈ Γ car AB=$|2+\mathrm{i}-1| = |1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$,

et C∈ Γ car AC=$|2+\mathrm{i}-3| = |-1+\mathrm{i}| = \sqrt{2}$.

Le nombre de points d'intersection d'une droite avec un cercle est au maximum égal à deux, nous avons ici deux points d'intersection, ce sont donc les seuls.

b. Le point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ), est tel que A est le milieu du segment [BD], par conséquent $z_A = \dfrac{z_B + z_D}{2} \iff z_D = 2z_A - z_B = 3+2\mathrm{i}$.

3. a. $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \dfrac{3+2\mathrm{i} - \left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}\mathrm{i}\right)}{1 - \left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}\mathrm{i}\right)} = \dfrac{15+10\mathrm{i}-3-6\mathrm{i}}{5-3-6\mathrm{i}} = \dfrac{12+4\mathrm{i}}{2-6\mathrm{i}} = 2\mathrm{i}\dfrac{-6\mathrm{i}+2}{2-6\mathrm{i}} = 2\mathrm{i}.$

b. On a M distinct de B et M distinct de D, on a donc :

$\arg\left(\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}\right) = \left(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MD}\right) \quad [2\pi]$, or $\arg(2\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

par conséquent $\left(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MD}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$, on en déduit que le triangle BMD est rectangle en M, et donc que M appartient au cercle de diamètre [BD], c'est-à-dire (Γ).

4. a. La droite (DM) est perpendiculaire à la droite (BD), de plus N appartient au cercle (γ') et donc le triangle ANB est rectangle en N ainsi la droite (AN) est perpendiculaire à la droite (AB) c'est-à-dire à la droite (BD).

On en déduit ainsi que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

b. Les droites (DM) et (AN) sont parallèles, N appartient à la droite (BM) et A est le milieu du segment [BD], d'après le théorème de la droite des milieux, on en déduit que N es le milieu du segment [BM].

Par conséquent : $z_N = \dfrac{z_B + z_M}{2} = \dfrac{4}{5} + \mathrm{i}\dfrac{3}{5}$.

5. a. La rotation de centre B et d'angle $\dfrac{-\pi}{2}$ a pour écriture complexe :

$z' - 1 = \mathrm{e}^{\frac{-\pi}{2}}(z-1)$ ce qui donne $z' = -\mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$

ainsi, $z_{\mathrm{M'}} = -\mathrm{i}\left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}\mathrm{i}\right) + 1 + \mathrm{i} = \dfrac{11}{5} + \dfrac{2}{5}\mathrm{i}$.

b. Le point M' est distinct du point A et point B, donc on a :

$\left(\overrightarrow{\mathrm{M'A}}\,;\overrightarrow{\mathrm{M'B}}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{M'}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{M'}}}\right) \quad [2\pi]$,

de plus $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{M'}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{M'}}} = \dfrac{1 - \left(\frac{11}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}\right)}{2 + \mathrm{i} - \left(\frac{11}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{i}\right)} = \dfrac{5 - 11 - 2\mathrm{i}}{10 + 5\mathrm{i} - 11 - 2\mathrm{i}} = \dfrac{-6 - 2\mathrm{i}}{-1 + 3\mathrm{i}} = 2\mathrm{i}\dfrac{3\mathrm{i} - 1}{-1 + 3\mathrm{i}} = 2\mathrm{i}$

or $\arg 2i = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ ainsi on déduit que le triangle AM'B est rectangle en M' et donc que le point M' appartient au cercle (Γ').

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement obligatoire

Partie A

1. Pour tout point M de l'espace, on a :

$\overrightarrow{M\mathrm{D}}.\overrightarrow{M\mathrm{A}} = \left(\overrightarrow{M\mathrm{I}} + \overrightarrow{\mathrm{I}D}\right).\left(\overrightarrow{M\mathrm{I}} + \overrightarrow{\mathrm{I}A}\right) = \overrightarrow{M\mathrm{I}}^2 + \overrightarrow{M\mathrm{I}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{I}A} + \overrightarrow{\mathrm{I}D}\right) + \overrightarrow{\mathrm{I}D}.\overrightarrow{\mathrm{I}A}$

or I est le milieu du segment [AD], donc $\overrightarrow{\mathrm{I}D} = -\overrightarrow{\mathrm{I}A}$,

et par conséquent , $\overrightarrow{M\mathrm{D}} \cdot \overrightarrow{M\mathrm{A}} = M\mathrm{I}^2 + \overrightarrow{M\mathrm{I}}.\overrightarrow{0} - \mathrm{I}A^2 = M\mathrm{I}^2 - \mathrm{I}A^2$

2. Pour tout point M de l'espace, on a :

$\overrightarrow{M\mathrm{D}}.\overrightarrow{M\mathrm{A}} = 0 \iff M\mathrm{I}^2 - \mathrm{I}A^2 = 0 \iff M\mathrm{I}^2 = \mathrm{I}A^2 \iff M\mathrm{I} = \mathrm{I}A$ car $M\mathrm{I}$ et $\mathrm{I}A$ sont des réels positifs.

L'ensemble (E) cherché est donc la sphère de centre I passant par A.

Partie B

1. a. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}(-3\,;\,6\,;\,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{n} = -3 \times 4 + 6 \times 2 + 0 \times 0 = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}(-3\,;\,0\,;\,4)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{n} = -3 \times 4 + 0 \times 0 + 4 \times 3 = 0$

donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC),

on en déduit que $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC).

b. Le plan (ABC) a une équation de la forme : $4x + 2y + 3z + d = 0$.

Le point A(3 ; 0 ; 0) appartient au plan (ABC), donc $4 \times 3 + d = 0 \iff d = -12$.

(ABC) : $4x + 2y + 3z - 12 = 0$.

2. a. La droite Δ est orthogonale au plan (ABC), donc $\overrightarrow{n}$ est un vecteur directeur de Δ. On sait également que $\mathrm{D}(-5;0;1)$ est un point de Δ.

On en déduit une représentation paramétrique de Δ : $\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b. Le point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC), est le point d'intersection de D et du plan (ABC).

On résout :

$$\begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 3t \\ 4x + 2y + 3z - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 3t \\ -20 + 16t + 4t + 3 + 9t - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 0 + 2t \\ z = 1 + 3t \\ t = \dfrac{29}{29} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 4 \\ t = 1 \end{cases}$$ On obtient ainsi H(−1 ; 2 ; 4).

c. H est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC), donc la distance du point D au plan (ABC) est égale à la distance DH= $\sqrt{(-1+5)^2+2^2+(4-1)^2}=\sqrt{29}$.

d. Les points H et D appartiennent à la droite Δ.
Le vecteur $\overrightarrow{\text{HD}}$ est donc orthogonal au plan (ABC).
De plus, les points H et D appartiennent au plan (ABC), donc le vecteur $\overrightarrow{\text{HD}}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\text{HA}}$,
ainsi $\overrightarrow{\text{HD}}\cdot\overrightarrow{\text{HA}}=0$, donc H appartient à l'ensemble (E).

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

1. Soit $M(x;y;z)$ appartenant à (S).
On a $x^2+y^2-(-z)^2=x^2+y^2-z^2=1$ donc $M'(x;y;-z)$ appartient à (S), ainsi (S) est symétrique par rapport au plan (xOy).
2. Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}(-4;0;4)$ est un vecteur directeur de la droite (D).
ainsi (D) : $\left\{\begin{array}{l} x=-1-4t\\ y=1\\ z=1+4t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.
3. Pour $t\in\mathbb{R}$, on a $(-1-4t)^2+1^2-(1+4t)^2=(1+4t)^2+1^2-(1+4t)^2=1$.
Par conséquent tout point de (D) appartient à (S), c'est-à-dire (D) est incluse dans (S).
4. Un plan parallèle au plan (xOy) a une équation de la forme $z=k$ avec k constante réelle.
On résout le système : $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2-z^2=1\\ z=k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=1+k^2\\ z=k\end{array}\right.$ or $1+k^2>0$, on reconnait donc l'équation du cercle de centre $\Omega(0;0;k)$ et de rayon $\sqrt{1+k^2}$ inclus dans le plan d'équation $z=k$.
5. **a.** D'après ce qui précède, (C) est le cercle de centre $\Omega'(0~;~0~;~68)$ et de rayon $\sqrt{4\,625}=5\sqrt{185}$ inclus dans le plan d'équation $z=68$.

   b. Soit d=pgcd$(a~;~b)$, d divise a et b donc d^2 divise a^2 et b^2. On en déduit que d^2 divise $a^2+b^2=4\,625$.
   Or $4\,625=5^3\times 37$ ainsi d^2 est égal à 1 ou 5^2 c'est-à-dire d égal 1 ou 5.
   Supposons que $d=1$. On a alors $ab=$ppcm$(a~;~b)\times$pgcd$(a~;~b)=440$.
   Ainsi $a^2+b^2+2ab=5\,505 \iff (a+b)^2=5\,505$; or il n'existe pas d'entier dont le carré est égal à 5 505 ($\sqrt{5\,505}$ n'appartient pas à $\mathbb{N}$), par conséquent $d\neq 1$.
   Supposons que $d=5$. On a alors $ab=$ppcm$(a~;~b)\times$pgcd$(a~;~b)=2\,200$.
   Ainsi $a^2+b^2+2ab=9\,025 \iff (a+b)^2=9\,025 \iff a+b=95$ car $a+b>0$.
   De même $a^2+b^2-2ab=225 \iff (a-b)^2=225 \iff a-b=-15$ car $a-b<0$.
   $\left\{\begin{array}{l} a+b=95\\ a-b=-15\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a+b=95\\ 2a=80\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=40\\ b=55\end{array}\right.$
   Or 40<55, $40^2+55^2=4625$ et ppcm$(40;\,55)=5\times8\times11=440$.
   Ainsi il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient de entiers naturels vérifiant $a<b$ et ppcm$(a~;~b)=440$.

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. Pour $x\in]1~;~+\infty[$, on a $\ln x>0$ et on sait que la fonction ln est dérivable sur $]0~;~+\infty[$, on en déduit que f est une fonction dérivable sur $]1~;~+\infty[$, avec :

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{(\ln x)^2 + 1}{x(\ln x)^2}$.

Pour $x \in]1~;~+\infty[$, on a $(\ln x)^2 + 1 > 1 > 0$ et $x(\ln x)^2 > 0$, et donc $f'(x) > 0$.

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]1~;~+\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$, avec $\ln x > 0$ pour $x > 1$, par conséquent $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{1}{\ln x} = +\infty$

et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** Pour $x \in]1;+\infty[$, on a $f(x) - \ln x = -\dfrac{1}{\ln x}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \ln x = 0$.

On en déduit que $(\mathcal{C})$ et Γ sont asymptotes au voisinage de $+\infty$.

b. Pour $x \in]1~;~+\infty[$, on a $\ln x > 0$ et donc $-\dfrac{1}{\ln x} < 0$,

par conséquent $(\mathcal{C})$ est en dessous de Γ sur $]1~;~+\infty[$.

3. **a.** La tangente $\mathcal{T}_a$ a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Le point O appartient à $\mathcal{T}_a \iff 0 == f'(a)(0 - a) + f(a) \iff$ $f(a) - af'(a) = 0$.

b. Sur $]1~;~+\infty[$, on a $(\ln x)^2 \neq 0$, donc :

$$g(x) = 0 \iff f(x) - xf'(x) = 0 \iff \ln x - \frac{1}{\ln x} - \frac{(\ln x)^2 + 1}{(\ln x)^2} = 0$$

$$\iff \frac{(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1}{(\ln x)^2} = 0 \iff (\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0.$$

c. La fonction u est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1$.

On a $\Delta = 16$, donc u' admet deux racines distinctes :

$t_1 = \dfrac{2-4}{6} = -\dfrac{1}{3}$ et $t_2 = \dfrac{2+4}{6} = 1$.

De plus, $u'(t) > 0$ pour $t \in]-\infty;-\dfrac{1}{3}[\cup]1;+\infty[$ et $u'(t) < 0$ pour $t \in]-\dfrac{1}{3};1[$.

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u(t)$		$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	

La fonction u est croissante sur $\left]-\infty~;~-\dfrac{1}{3}\right[$ et décroissante sur $\left]-\dfrac{1}{3}~;~1\right[$.

Par conséquent, sur $]-\infty~;~1[$, la fonction u admet un maximum en $-\dfrac{1}{3}$.

Ce maximum vaut $-\dfrac{22}{27}$, ainsi l'équation $u(t) = 0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty~;~1[$.

La fonction u est continue et strictement croissante sur $[1~;~+\infty[$, avec $u(1) = -2$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$.

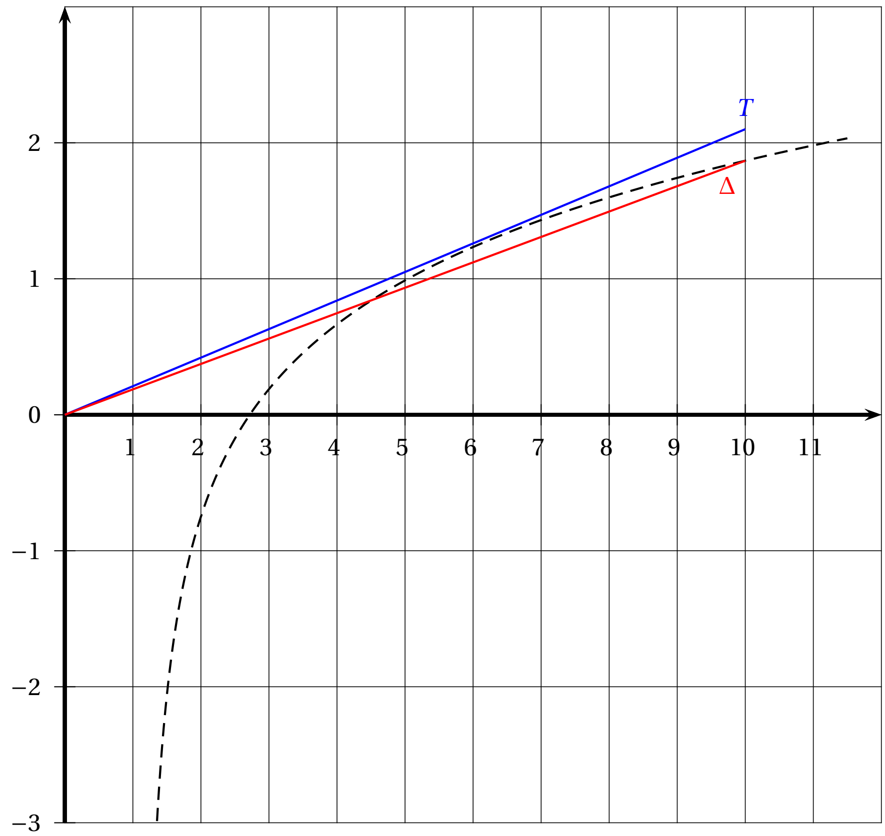
Or $0 \in [-2;+\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution sur $[1~;~+\infty[$, par conséquent, l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution, α, sur $\mathbb{R}$.

d. L'équation $(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0$ est équivalente au système

$$\left\{\begin{array}{l} t^3 - t^2 - t - 1 = 0 \\ t = \ln x \end{array}\right.$$

D'après ce qui précède, $\alpha \geqslant 1 > 0$, donc le réel x, tel que $\ln x = \alpha$, appartient à $]1~;~+\infty[$, ainsi l'équation $(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0$ admet une unique solution sur $]1~;~+\infty[$, il en est alors de même pour l'équation $g(x) = 0$ (d'après **3. b.**), et donc il existe une unique tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ passant par l'origine du repère (d'après **3. a.**).

4. Soit p le coefficient directeur de la tangente T que l'on vient de tracer.
Sur l'intervalle $]1~;~+\infty[$:
Pour $m \leq 0$, l'équation $f(x) = mx$ admet une solution.
Pour $0 < m < p$, l'équation $f(x) = mx$ admet deux solutions.
Pour $m = p$, l'équation $f(x) = mx$ admet une unique solution.
Pour $m > p$, l'équation $f(x) = mx$ n'admet pas de solution.
En traçant la droite Δ, passant par l'origine et par le point de coordonnées $(10~;~f(10))$, de coefficient directeur noté q, on obtient le résultat suivant :
Sur l'intervalle $]1~;~10[$:
Pour $m \leq 0$, l'équation $f(x) = mx$ admet une solution.
Pour $0 < m < q$, l'équation $f(x) = mx$ admet une solution unique.
Pour $q \leq m < p$, l'équation $f(x) = mx$ admet deux solutions.
Pour $m = p$, l'équation $f(x) = mx$ admet une unique solution.
Pour $m > p$, l'équation $f(x) = mx$ n'admet pas de solution.



EXERCICE 4 **4 points**
Commun à tous les candidats

1. a. Pour $t \in [0~;~1]$, on a $t^n \geqslant 0$, $0 \leqslant \cos t \leq 1$ car $[0;1] \subset \left[0~;~\dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc $t^n \cos t \geqslant 0$.
On en déduit que $x_n \geqslant 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$x_{n+1} - x_n = \displaystyle\int_0^1 t^{n+1} \cos t\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t^n \cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{n+1} \cos t - t^n \cos t\,\mathrm{d}t$

$= \displaystyle\int_0^1 t^n(t-1)\cos t\,\mathrm{d}t.$

Pour $t \in [0~;~1]$, on a $t^n \cos t \geqslant 0$, $t - 1 \leq 0$ et donc $t^n(t-1)\cos t \leqslant 0$,

par conséquent $x_{n+1} - x_n \leq 0$ ce qui démontre que la suite (x_n) est décroissante.

c. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers ℓ, avec $\ell \geqslant 0$ (théorème de convergence monotone).

2. a. Pour $t \in [0~;~1]$, on a $t^n \geqslant 0$, $0 \leq \cos t \leq 1$ et donc $0 \leq t^n \cos t \leq t^n$.

D'après le théorème de comparaison des intégrales, on en déduit :

$\displaystyle\int_0^1 t^n \cos t\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$, or $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

Par conséquent, $0 \leq x_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc, d'après le théorème des « gendarmes », on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

3. a. On réalise une intégration par parties :

$x_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 t^{n+1} \cos t\,\mathrm{d}t = \left[t^{n+1} \sin t\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)\,t^n \sin t\,\mathrm{d}t$

$= 1^{n+1} \sin(1) - (n+1)\displaystyle\int_0^1 t^n \sin t\,\mathrm{d}t$

donc, pour tout entier n non nul, on a $x_{n+1} = -(n+1)\,y_n + \sin(1)$.

b. On a $y_n = \dfrac{\sin(1) - x_{n+1}}{n+1}$, or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_n = 0$,

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$.

4. Pour tout entier n non nul, on a $x_{n+1} = -(n+1)\,y_n + \sin(1) = -ny - n - y_n + \sin(1)$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -y_n + \sin(1) = \sin(1)$,

par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ny_n = \sin(1)$.

De même, on a $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1) = nx_n + x_n - \cos(1)$.

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_{n+1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n - \cos(1) = -\cos(1)$,

par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nx_n = \cos(1)$.