

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord 4 juin 2009

EXERCICE 1

5 points

Partie A : Étude de la progression de l'épidémie pendant 30 jours

1. Comme y est dérivable sur $[0; 30]$, z aussi et $y' = -\frac{z'}{z^2}$; on va remplacer :

$$\begin{cases} y(0) = 0,01 \\ y' = 0,05y(10-y) \end{cases} \iff \begin{cases} z(0) = 100 \\ -\frac{z'}{z^2} = 0,05\frac{1}{z}(10-\frac{1}{z}) \end{cases} \iff \begin{cases} z(0) = 100 \\ z' = -0,5z + 0,05 \end{cases}$$

2. a. z est donc solution d'une équation différentielle de la forme $z' = az + b$. Les solutions sont les fonctions définies sur $[0; 30]$ par $z(x) = ke^{-0,5x} + 0,1$ avec k réel.

$$z(0) = 100 \iff ke^{-0,5 \times 0} + 0,1 = 100 \iff k = 99,9$$

Ainsi, z est définie par $z(x) = 99,9e^{-0,5x} + 0,1$

$$\text{Enfin, } y \text{ est définie par } y(x) = \frac{1}{99,9e^{-0,5x} + 0,1}.$$

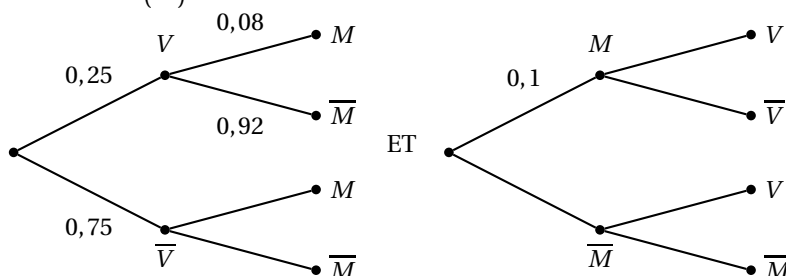
- b. On veut $y(30)$.

$$y(30) = \frac{1}{99,9e^{-0,5 \times 30} + 0,1} \approx 9,99. \text{ Après 30 jours, 10 \% de la population est infectée.}$$

Partie B : Étude sur l'efficacité d'un vaccin

1. Notons M l'évènement « l'individu tombe malade » et V « l'individu est vacciné ».

On a $p(V) = 0,25$; $p_V(\overline{M}) = 0,92$ et $p(M) = 0,1$



On veut $p(M \cap \overline{V})$.

$$p(M \cap V) = p(V)p_V(M) = 0,25 \times 0,08 = 0,02.$$

$$p_M(V) = \frac{p(M \cap V)}{p(M)} = \frac{0,02}{0,1} = 0,2$$

$$p_M(\overline{V}) = 1 - p_M(V) = 0,8$$

$$\text{Enfin, } p(M \cap \overline{V}) = p(M) \times p_M(\overline{V}) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$$

2. On cherche ici $p_{\overline{V}}(M)$: $p_{\overline{V}}(M) = \frac{p(M \cap \overline{V})}{p(\overline{V})} = \frac{0,08}{0,75} = \frac{8}{75}$.

EXERCICE 2

5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Voir le cours pour les détails, voici la démarche :

Par linéarité de l'intégrale (second rappel) : $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \iff \int_a^b (f-g)(x) dx \leq 0$.

Or, pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, donc $f-g \leq 0$ et le premier rappel assure le résultat.

Partie B

1. a. f est la composée de la fonction $x \mapsto -x^2$, décroissante sur $[0 ; 1]$, suivie de la fonction exponentielle croissante sur \mathbb{R} . f est donc décroissante sur $[0 ; 1]$.

On peut bien sûr argumenter sur la dérivabilité de f puis le signe de sa dérivée.

On en déduit que, pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(1) \leq f(x) \leq f(0) \iff \frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$.

- b. Par croissance de l'intégrale, on déduit de la question précédente :

$$\int_0^1 \frac{1}{e} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 1 dx \iff \frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1$$

2. $u_1 = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx$

On pose $u(x) = -x^2$, ainsi $u'(x) = -2x$ et $(u'e^u)'(x) = -2x f(x) \iff x f(x) = -\frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)}$.

On a donc : $u_1 = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2e} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$.

3. a. Comme la fonction exponentielle est positive sur \mathbb{R} , pour tout x de $[0 ; 1]$, $x^n f(x) \geq 0$. Enfin, comme les bornes sont dans le bon ordre, par positivité de l'intégrale, on a bien le résultat.

- b. Pour tout n dans \mathbb{N} , $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1} f(x) - x^n f(x) dx = \int_0^1 (x-1)x^n f(x) dx \leq 0$ car la fonction intégrée est clairement négative sur $[0 ; 1]$.

La suite (u_n) est décroissante.

- c. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

4. a. D'après la question 1. a., pour tout x de $[0 ; 1]$, $f(x) \leq 1$, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 x^n f(x) dx \leq \int_0^1 x^n dx \iff \int_0^1 x^n f(x) dx \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \iff \int_0^1 x^n f(x) dx \leq \frac{1}{n+1}$$

- b. D'après les questions 3. a. et 4. a., on a $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Avec le théorème des gendarmes la suite converge vers 0.

EXERCICE 3

5 points

1. $\vec{AI} = \frac{1}{2} (\vec{AD} + \vec{AE})$, donc $I \left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right)$

$\vec{AJ} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AD})$, donc $J \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 0 \right)$

Enfin, K est le milieu de [IJ], donc $K \left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} \right)$

2. On a $G(1 ; 1 ; 1)$, donc $\vec{AG} (1 ; 1 ; 1)$ et $\vec{AK} \left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{4} \right)$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc ils ne sont pas colinéaires, donc les points A, K et G ne sont pas alignés.

3. a. Montrons que les trois points A, K et G sont équidistants de I et J.

$AI = AJ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ (cube de côté 1).

$KI = KJ$ car K est le milieu de [IJ].

Le théorème de Pythagore appliqués aux triangles GHI rectangle en H et GCJ rectangle en C, permet de montrer que $GI = GJ$.

Les trois points A, K et G sont équidistants de I et J, donc (AKG) est bien le plan médiateur de [IJ].

- b. Le vecteur $\vec{IJ} \left(\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2} \right)$ est donc normal à (AKG), une équation cartésienne de ce plan est donc de la forme : $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z + d = 0 \iff x - z + 2d = 0$.
 Comme $A \in (AKG)$, les coordonnées de A vérifient cette équation, donc $d = 0$.
 Une équation de (AKG) est donc $x - z = 0$.
- c. Les coordonnées de D(0 ; 1 ; 0) vérifient l'équation précédente, donc $D \in (AKG)$.
4. a. $L \left(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2} \right)$, on en déduit les coordonnées du milieu de [AL]; on trouve les coordonnées de K!
 b. Démontrer que K est le barycentre des points A, D et G affectés de coefficients que l'on précisera.
 On vient de montrer que K est le milieu de [AL], donc $K = \text{bar}\{(A, 2), (L, 2)\}$
 Mais, L est aussi le milieu de [DG], donc $L = \text{bar}\{(D, 1), (G, 1)\}$
 Par associativité du barycentre, on a donc $K = \text{bar}\{(A, 2), (D, 1), (G, 1)\}$.

EXERCICE 4

5 points

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit A le point d'affixe $a = 1 + i\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$.

Partie A : étude d'un cas particulier

1. a. $\frac{-a}{b-a} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}+i} = \frac{(-1-i\sqrt{3})(-\sqrt{3}-i)}{4} = i$
 b. On en déduit que $0 - a = i(b - a)$, donc, que le point O est l'image de B(b) dans la rotation de centre A(a) et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 Le triangle OAB est bien rectangle, isocèle en A.
2. On utilise l'écriture complexe de la rotation $r : z' - 0 = e^{\frac{2\pi}{3}}(z - 0)$.
 $c = e^{\frac{2\pi}{3}} a = e^{\frac{2\pi}{3}} (1 + i\sqrt{3}) = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) (1 + i\sqrt{3}) = \frac{1}{2} (-1 - (\sqrt{3})^2) = -2$
3. a. On peut se contenter de vérifier que les coordonnées de A et de C vérifient cette équation :
 $A(1; \sqrt{3})$ et $C(0; -2)$.
 Pour A : $\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1+2) = \sqrt{3}$. OK
 Pour C : $\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2) = \frac{\sqrt{3}}{3}(-2+2) = 0$. OK
 A et C appartiennent à la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$, c'est donc bien la droite (AC).
- b. L'affixe du milieu E de [BD] est $z_E = \frac{b+d}{2} = \frac{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i-2-2i}{2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$
 Or, $\frac{\sqrt{3}}{3}(x_E+2) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + 2 \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = y_E$. E est bien sur (AC).

Partie B : étude du cas général

1. $a' = ae^{i\theta}$ et $b' = be^{i\theta}$.
2. a. $p = \frac{a+a'}{2} = \frac{1}{2}a(1+e^{i\theta})$
 $q = \frac{b+b'}{2} = \frac{1}{2}b(1+e^{i\theta})$
- b. $\frac{-p}{q-p} = \frac{-\frac{1}{2}a(1+e^{i\theta})}{\frac{1}{2}b(1+e^{i\theta}) - \frac{1}{2}a(1+e^{i\theta})} = \frac{-a}{b-a}$ en simplifiant par $\frac{1}{2}(1+e^{i\theta})$
- c. Or, d'après la question A 1. a., $\frac{-a}{b-a} = i$, donc $\frac{-p}{q-p} = i$. Donc, $(\overrightarrow{PQ}; \overrightarrow{PO}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
 Les droites (OP) et (PQ) sont bien orthogonales.
- d. A' est l'image de A dans une rotation de centre O, donc $OA' = OA$ et O est sur la médiatrice de (AA') .
 Comme P est le milieu de $[AA']$, cette médiatrice est donc (OP).
 Les deux droites (PQ) et (AA') sont donc orthogonales à (OP) et passent par P, elles sont donc confondues et Q appartient bien à (AA') .

EXERCICE 4

5 points

Enseignement de spécialité

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1 ; 46]$.

1. On considère l'équation

$$(E) : 23x + 47y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

- a. $(-2; 1)$ est une solution de (E) car $-2 \times 23 + 1 \times 47 = 1$.
- b. $(x ; y)$ solution de $(E) \Rightarrow 23x + 47y = 1$

$$\begin{cases} 23x + 47y = 1 \\ -2 \times 23 + 1 \times 47 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{par soustraction}} 23(x+2) + 47(y-1) = 0 \Rightarrow 23(x+2) = 47(1-y)$$

 Donc 23 divise $47(1-y)$, mais 47 et 23 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 23 divise $1-y$.
 Donc il existe un entier relatif k tel que $1-y = 23k$ soit $y = 1 - 23k$
 On a donc aussi, $23(x+2) = 47 \times 23k \iff x = 47k - 2$
 On vérifie que, réciproquement, pour tout entier relatif k, $(47k - 2 ; 1 - 23k)$ est bien solution de (E).
 L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples $(47k - 2 ; 1 - 23k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- c. $23x \equiv 1 \pmod{47} \iff$ il existe $y \in \mathbb{Z}$, $23x = 1 - 47y \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$, $x = 47k - 2$ et $y = 1 - 23k$
 De plus $x \in A \iff 1 \leq 47k - 2 \leq 46 \iff 3 \leq 47k \leq 48$.
 Or un seul multiple de 47 se trouve dans cet encadrement, c'est 47. Donc $k = 1$ et $x = 45$.
 Le seul entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1 \pmod{47}$ est 45.

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

- a. $ab \equiv 0 \pmod{47} \iff 47$ divise ab .
 Or 47 est un nombre premier, il apparait donc au moins dans l'une des deux décompositions de a ou de b. D'où le résultat.
- b. $a^2 \equiv 1 \pmod{47} \iff a^2 - 1 \equiv 0 \pmod{47} \iff (a-1)(a+1) \equiv 0 \pmod{47} \xrightarrow{2a} a-1 \equiv 0 \pmod{47}$ ou $a+1 \equiv 0 \pmod{47} \dots$
3. a. Tout entier p de A est premier avec 47, donc le théorème de Bezout assure l'existence de (q, s) entiers relatifs tels que $qp + 47s = 1$.
 On a alors $p \times q \equiv 1 \pmod{47}$.

b. $p = \text{inv}(p) \Rightarrow p^2 \equiv 1 \pmod{47} \stackrel{2b}{\Rightarrow} p \equiv -1 \pmod{47}$ ou $p \equiv 1 \pmod{47} \stackrel{p \in A}{\Rightarrow} p = 46$ ou $p = 1$

Réciproquement 1 et 46 conviennent bien.

- c. Pour tout entier p de A compris entre 2 et 45, il existe (d'après 3a) un entier de A **distinct** (d'après 3b) $\text{inv}(p)$ tel que $p \times \text{inv}(p) \equiv 1 \pmod{47}$, donc $45! \equiv 1 \pmod{47}$. On en déduit $46! \equiv 46 \pmod{47}$ soit enfin $46! \equiv -1 \pmod{47}$.