Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord mai 2004

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

Affirmation 1 : Vraie

G_1 est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 2), soit par associativité celui de (I, 2), (C, 2) qui est bien le milieu de [IC].

Affirmation 2 : Vraie

J est l'isobarycentre de A, B et C, soit le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1).

L'affirmation signifie que G_1 est le barycentre de (J, 2), $\left(\text{C}, \frac{2}{3}\right)$, ou encore celui de (J, 1), $\left(\text{C}, \frac{1}{3}\right)$ c'est-à-dire celui de $\left(\text{A}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\text{B}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\text{C}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\text{C}, \frac{1}{3}\right)$ ou encore celui de $\left(\text{A}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\text{B}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\text{C}, \frac{2}{3}\right)$, soit celui de (A, 1), (B, 1), (C, 2), ce qui est vrai par définition de G_1.

Affirmation 3 : Fausse

M , $\overrightarrow{V_M} = 3\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} - 2\overrightarrow{M\text{C}} = 3\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{\text{AB}} - 2\overrightarrow{M\text{A}} - 2\overrightarrow{\text{AC}} = -\overrightarrow{\text{AB}} - 2\overrightarrow{\text{AC}}$ (c'est donc en fait l'opposé de la réponse proposée).

Affirmation 4 : Vraie

Par définition du barycentre, si $1+3m \neq 0 \iff m \neq -\dfrac{1}{3}$, le barycentre G_m existe et vérifie :

$\overrightarrow{G_m\text{A}} + m\overrightarrow{G_m\text{B}} + 2m\overrightarrow{G_m\text{C}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{G_m\text{A}} + m\overrightarrow{G_m\text{A}} + m\overrightarrow{\text{AB}} + 2m\overrightarrow{G_m\text{A}} + 2m\overrightarrow{\text{AC}} = \overrightarrow{0} \iff (1+3m)\overrightarrow{G_m\text{A}} + m\overrightarrow{\text{AB}} + 2m\overrightarrow{\text{AC}}\,\overrightarrow{0} \iff (1+3m)\overrightarrow{G_m\text{A}} = -m\left(\overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{AC}}\right)$.

En particulier $-2\overrightarrow{G_{-1}\text{A}} = \left(\overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{AC}}\right) \iff \overrightarrow{G_{-1}\text{A}} = -\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{AC}}\right) \iff$

$\overrightarrow{\text{A}G_{-1}} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{AC}}\right)$.

Donc les deux vecteurs sont bien colinéaires

Affirmation 5 : Vraie

D'après la question précédente : $\overrightarrow{\text{A}G_{-1}} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{AC}}\right) \iff \overrightarrow{\text{AB}} + \overrightarrow{\text{B}G_{-\frac{1}{2}}} =$

$\overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{AC}} \iff \overrightarrow{\text{B}G_{-\frac{1}{2}}} = 2\overrightarrow{\text{AC}}$.

On en déduit que la droite $(\text{B}G_{-\frac{1}{2}})$ est parallèle à la droite (AC) qui est, elle perpendiculaire à la droite (AB). Le point I appartenant à la droite (AB), on conclut que le triangle $\text{IB}G_{-\frac{1}{2}}$ est rectangle en B.

Affirmation 6 : Fausse

Avec $m = -1, -2\overrightarrow{G_{-1}\text{A}} = \overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{AC}} \iff \overrightarrow{\text{A}G_{-1}} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{AC}}\right)$.

Soit P un point de $(\text{A}G_{-1})$: il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\text{A}P} = \alpha\overrightarrow{\text{A}G_{-1}} = \dfrac{\alpha}{2}\left(\overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{AC}}\right)$.

Tout barycentre G_m vérifie : $\overrightarrow{\text{A}G_m} = \dfrac{m}{1+3m}\left(\overrightarrow{\text{AB}} + 2\overrightarrow{\text{AC}}\right)$.

Donc $P = G_m \iff \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{m}{1+3m} \iff \alpha + 3m\alpha = 2m \iff m(2-3\alpha) = \alpha \iff$

$m = \dfrac{\alpha}{2-3\alpha}$. Tout point P correspond à un barycentre sauf si $2-3\alpha = 0 \iff \alpha = \dfrac{2}{3}$.

Le point P de $(\text{A}G_{-1})$ défini par $\overrightarrow{\text{A}P} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\text{A}G_{-1}}$ n'est pas un point G_m.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $(z-2)\left(z^2+az+b\right) = z^3 + az^2 + bz - 2z^2 - 2az - 2b =$
   $z^3 + (a-2)z^2 + (b-2a)z - 2b$.
   Donc $z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = (z-2)\left(z^2+az+b\right) \iff a = 6$ et $b = 14$.

$$z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = (z-2)\left(z^2+6z+14\right)$$

b. $z^3+4z^2+2z-28=0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-2 & = & 0 \quad \text{ou} \\ z^2+6z+14 & = & 0 \end{array}\right.$

Résolution de $z^2+6z+14=0 \iff (z+3)^2-9+14=0 \iff$
$(z+3)^2+5=0 \iff (z+3)^2=\left(\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^2$.

Cette équation a deux solutions complexes conjuguées : $z_1=-3+\mathrm{i}\sqrt{5}$ et $z_2=-3-\mathrm{i}\sqrt{5}$.

Conclusion l'équation a trois solutions dans $\mathbb{C}$:

$2, \quad -3+\mathrm{i}\sqrt{5}, \quad -3-\mathrm{i}\sqrt{5}$.

2. a. $M(x+\mathrm{i}y)$ appartient à (H) si et seulement si $(x+\mathrm{i}y)^2-4=4-(x-\mathrm{i}y)^2 \iff x^2-y^2+2\mathrm{i}xy-4=4-x^2-y^2+2\mathrm{i}xy \iff 2x^2-2y^2=8 \iff x^2-y^2=4$.

b. On vérifie que la condition précédente est réalisée par les affixes des points A, B et C

Pour A : $2^2=4$ Vraie

Pour B : $(-3)^2-\left(\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^2=9-5=4$ Vraie

Pour C : $(-3)^2-\left(-\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^2=9-5=4$ Vraie

3. a. La rotation est définie par :

$$z_{M'}=z_M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=z_M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Donc $z_{\mathrm{A}'}=z_A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}$.

$$z_{\mathrm{B}'}=z_B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=\left(-3-\mathrm{i}\sqrt{5}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}+\mathrm{i}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}\right).$$

$$z_{\mathrm{C}'}=z_C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}=\left(-3+\mathrm{i}\sqrt{5}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}+\mathrm{i}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}\right).$$

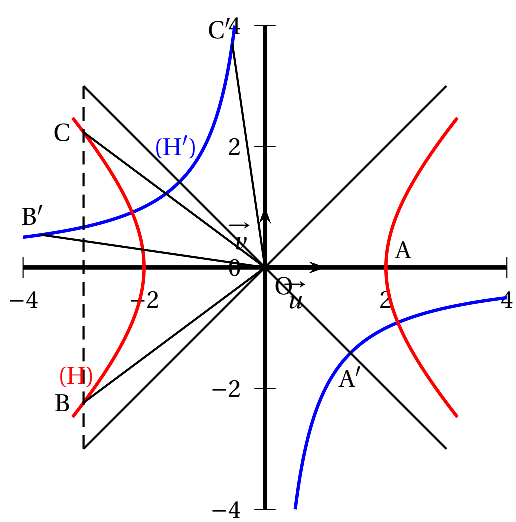
b. $z_{M'}=z_M\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \iff z_M=z_{M'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \iff x+\mathrm{i}y=(x'+\mathrm{i}y')\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

En identifiant partie réelle et imaginaire on obtient :

- $x=x'\frac{\sqrt{2}}{2}-y'\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $y=x'\frac{\sqrt{2}}{2}+y'\frac{\sqrt{2}}{2}$ On a vu que M appartient à (H) si et seulement si $x^2-y^2=2$ soit en remplaçant par les valeurs trouvées juste au dessus :

$\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2}-y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(x'\frac{\sqrt{2}}{2}+y'\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=4 \iff \frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{2}-x'y'\times\frac{1}{2}-\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{2}-x'y'\times\frac{1}{2}=4 \iff -2x'y'=4 \iff x'y'=-2$.

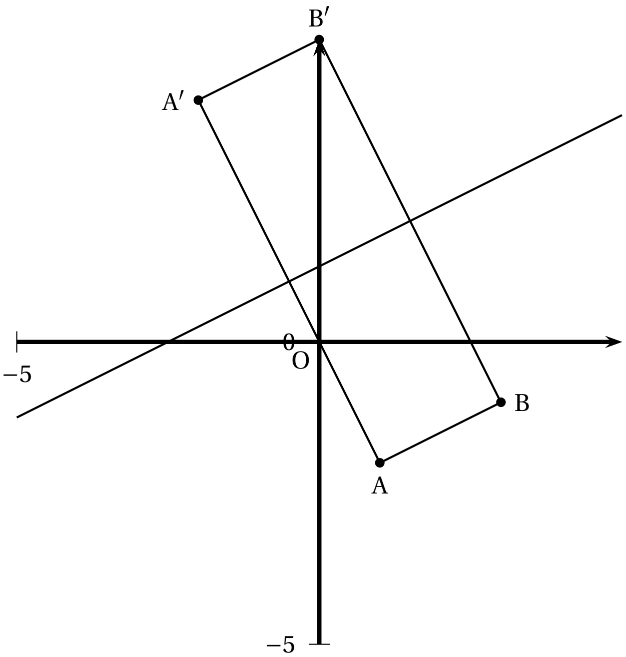
4.



EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. a.



Le milieu de [AB′] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right)$, celui de [A′B] $\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{2}\right)$.

Le quadrilatère ABB′A′ a ses diagonales qui ont le même milieu : c'est un parallélogramme.

D'autre part $\overrightarrow{\text{AB}}(2\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{\text{AA}'}(-3\ ;\ 6)$, donc $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AA}'} = -6 + 6 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (AA′) sont perpendiculaires.

Le quadrilatère ABB′A′ est un parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont perpendiculaires : c'est un rectangle.

b. D'après la question précédente, la droite (Δ) est la médiatrice commune à [AA′] et à [BB′] : elle est donc perpendiculaire à (AA′) et contient le milieu I de [AA′] de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$.

Un vecteur directeur de (Δ) est donc orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\text{AA}'}(-3\ ;\ 6)$, par exemple le vecteur $(6\,;\,3)$ ou plus simplement $\overrightarrow{d}_1(2\,;\,1)$.

$M(x\ ;\ y) \in (\Delta) \iff \overrightarrow{\text{I}M}$ et $\overrightarrow{d}_1$ sont colinéaires c.-à-d. $\begin{cases} x + \frac{1}{2} &= 2\alpha \\ y - 1 &= \alpha \end{cases}$, soit en éliminant α, $x + \frac{1}{2} = 2(y-1) \iff 2x + 1 = 4y - 4 \iff 2x - 4y + 5 = 0$.

c. Toute réflexion est une similitude indirecte donc l'écriture complexe est $z' = a\overline{z} + b$. En utilisant A, B et leurs images par s, on a :

$\begin{cases} -2+4\text{i} &= a(1b+2\text{i})+b \\ 5\text{i} &= a(3+\text{i}+b \end{cases} \Rightarrow$ par différence $-2+4\text{i}-5\text{i} = a(1+2\text{i}-3-\text{i}) \iff -2-\text{i} = a(-2+\text{i}) \iff a = \frac{-2-\text{i}}{-2+\text{i}} = \frac{(-2-\text{i})(-2-\text{i})}{(-2+\text{i})(-2-\text{i})} = \frac{4-1+\text{i}(2+2)}{4+1} = \frac{3+\text{i}}{5}$.

En remplaçant dans l'une ou l'autre des deux équations ci dessus :

$b = 5\text{i} - (3+\text{i})\left(\frac{3+\text{i}}{5}\right) = 5\text{i} - \frac{9}{5} - \frac{3\text{i}}{5} - \frac{3\text{i}}{5} + \frac{1}{5} = -1 + 2\text{i}$.

L'écriture complexe de s est donc :

$$z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\text{i}\right)\overline{z} - 1 + 2\text{i}.$$

2.

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} + 5 - \mathrm{i}.$$

a. On a $z_{\mathrm{C}} = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)\left(\overline{1-2\mathrm{i}}\right) + 5 - \mathrm{i} = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)(1+2\mathrm{i}) + 5 - \mathrm{i} = -\frac{6}{5} + \frac{16}{5} - \frac{8\mathrm{i}}{5} - \frac{12\mathrm{i}}{5} + 5 - \mathrm{i} = 7 - 5\mathrm{i}.$

De même : $z_{\mathrm{D}} = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)(3+\mathrm{i}) + 5 - \mathrm{i} = -\frac{18}{5} + \frac{8}{5} - \frac{6\mathrm{i}}{5} - \frac{8\mathrm{i}}{5} + 5 - \mathrm{i} = 3 - 7\mathrm{i}.$

b. L'écriture complexe de l'homothétie est : $z' - (1+\mathrm{i}) = -2\,(z - 1 - \mathrm{i}) \iff z' = -2z + 3 + 3\mathrm{i}.$

Image de A$'$ par h : $z' = -2(-2 + 4\mathrm{i} + 3 + 3\mathrm{i} = 7 - 5\mathrm{i} = z_{\mathrm{C}}.$

Image de B$'$ par h : $z' = -2(5\mathrm{i} + 3 + 3\mathrm{i} = 3 - 7\mathrm{i} = z_{\mathrm{D}}.$

c. L'homothétie inverse de h est l'homothétie h^{-1} de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Elle est donc définie par $z - (1+\mathrm{i}) = -\frac{1}{2}\,(z_1 - (1+\mathrm{i}) \iff z = -\frac{1}{2}z_1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}.$

3. a. On a $f(z) = h^{-1} \circ g(z) = h^{-1}\left[g(z)\right] = h^{-1}\left[\left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} + 5 - \mathrm{i}\right] =$

$-\frac{1}{2}\left(\left[\left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} + 5 - \mathrm{i}\right]\right) + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i} = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\right)\overline{z} - 1 + 2\mathrm{i}.$

b. On retrouve l'écriture de s.

On a donc $s = h^{-1} \circ g \iff g = h \circ s.$

D'où la construction d'un point M par s :

— Construire le symétrique M' de M autour de (Δ) ;

— Construire l'homothétique M'' de M' par l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.

EXERCICE 3 — 4 points

Commun à tous les candidats

1. a. Il y a 2 cases rouges, 4 cases vertes, 6 cases jaunes et 18 cases blanches, donc :

- $p(X = 8) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$
- $p(X = 5) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$
- $p(X = 0) = \frac{6}{30} = \frac{3}{15}$
- $p(X = -a) = \frac{18}{30} = \frac{9}{15}$

b. Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance E(X) soit nulle.

$\mathrm{E}(X = 0) \iff 8 \times \frac{1}{15} + 5 \times \frac{2}{15} + 0 \times \frac{3}{15} - a \times \frac{9}{15} = 0 \iff \frac{18 - 9a}{15} = 0 \iff a = 2.$

2. a. La probabilité d'avoir un gain strictement positif est égale à : $\frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,20.$

b. La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{5}$.

La probabilité de gagner exactement 2 fois est :

$p(Y = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{5-2} = 10 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3 = 10 \times \frac{4^3}{5^5} = \frac{128}{625} = 0{,}2048.$

La probabilité de gagner exactement 5 fois est : $p(Y = 5) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{5-5}$

$= 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^5 = \frac{1}{5^5} = \frac{1}{3125} = 0{,}00032.$

c. L'espérance mathématique de la variable Y est égal au nombre moyen de partie(s) gagnante(s). Y est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et de probabilité $p = \frac{1}{5}$, donc $\mathrm{E}(Y) = 5 \times \frac{1}{5} = 1.$

Sur 5 parties consécutives jouées, on gagne en moyenne une fois.

EXERCICE 4 **8 points**
Commun à tous les candidats

Partie I

1. a. $g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow g'(x) = h'(x)\mathrm{e}^{-x} - h(x)\mathrm{e}^{-x}$.
g est solution de E_n si et seulement si :
$g' + g = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \iff$
$h'(x)\mathrm{e}^{-x} - h(x)\mathrm{e}^{-x} + h(x)\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x} \iff h'(x)\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$ et comme $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a finalement $h'(x) = \dfrac{x^n}{n!}$.

b. Une primitive de $\dfrac{x^n}{n!}$ est $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)n!} = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, donc $h(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + K$ et comme $h(0) = 0$, il en résulte $K = 0$.
Donc $h(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ Comme $g(x) = h(x)\mathrm{e}^{-x}$, on a finalement quel que soit x réel :

$$g(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. a. φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi + \varphi' = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$.
g est solution de (E_n) donc $g' + g = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$, d'où par différence
$\varphi + \varphi' - (g' + g) = 0 \iff (\varphi - g)' + (\varphi - g) = 0$ (par linéarité de la dérivation.
Donc φ est solution de (E_n) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de l'équation :

$$(\mathrm{F}) \qquad y' + y = 0.$$

b. On sait que les solutions sont les fonctions $x \longmapsto C\mathrm{e}^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

c. Les fonctions $\varphi - g$ sont donc les fonctions $C\mathrm{e}^{-x}$, donc $\varphi(x) = g(x) + C\mathrm{e}^{-x}$ soit finalement :

$$\varphi(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x},\ C \in \mathbb{R}.$$

d. La solution vérifiant $\varphi(0) = 0$ est telle que $0 + C = 0 \iff C = 0$.
Finalement :

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-x} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Partie II

1. a. f_1 produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur $\mathbb{R}$,
$f_1'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$.
Donc $f_1'(x) + f_1(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$, c'est-à-dire que f_1 est solution de l'équation différentielle $y' + y = f_0$.

b. **Initialisation :** pour $n = 1$, $f_1(x) = \dfrac{x^1}{1!}\mathrm{e}^{-x}$ est solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{1-1}$ et $f_1(0) = 0$, d'après la question précédente.
Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$.
Par définition f_{n+1} vérifie $f_{n+1}'(x) + f_{n+1}(x) = \dfrac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$ et $f_{n+1}(0) = 0$.

D'après la partie 1, la fonction solution de l'équation différentielle ci-dessous est :

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-x}$$

L'égalité est vraie au rang $n+1$. L'hérédité est démontrée.
On a donc démontrer que pour tout naturel $n \geqslant 1$,

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. **a.** On a $0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -1 \leqslant -x \leqslant 0$ et par croissance de la fonction exponentielle $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{0}$, soit $0 \leqslant \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$, puis par multiplication le nombre positif $\frac{x^n}{n!}$, on obtient $0 < \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n!}x^n \leqslant \frac{x^n}{n!}$.

Par intégration sur $[0\,;1]$, $0 < I_n \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{d}x$.

Or $\int_0^1 \frac{x^n}{n!}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{n!}\right]_0^1 = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$.

Conclusion $0 < I_n \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 0.$$

b. Si $k \geqslant 1$, et $x \in [0\,;\,1]$, on a $f_k'(x) + f_k(x) = f_{k-1}(x)$.
En intégrant cette égalité sur $[0\,;1]$:
$\int_0^1 f_k'(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f_{k-1}(x)\,\mathrm{d}x \iff \int_0^1 f_k'(x)\,\mathrm{d}x + I_k = I_{k-1} \iff I_k - I_{k-1} = -\int_0^1 f_{k-1}(x)\,\mathrm{d}x = -f_x(1) + f_k(0) = -f_k(1)$.

Or $-f_k(1) = -\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

Conclusion : $I_k - I_{k-1} = -\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}$.

c. $I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 1 - \mathrm{e}^{-1} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$. On a :

$$\begin{array}{lcl}
I_1 - I_0 & = & -\frac{1}{1!}\mathrm{e}^{-1} \\
I_2 - I_1 & = & -\frac{1}{2!}\mathrm{e}^{-1} \\
\dots & = & \dots \\
I_k - I_{k-1} & = & -\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}
\end{array}$$

En faisant la somme membres à membres de toutes ces égalités :
$I_k - I_0 = -\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) \iff I_k = I_0 - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-1} - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right)$, soit encore

$$I_n = 1 - \mathrm{e}^{-1} - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1}.$$

d. Le résultat précédent peut s'écrire $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1} = 1 - I_n$. On a vu que

$\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$. On a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-1} = 1$ soit par produit par e :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}.$$