∽ Corrigé du baccalauréat S Amérique Nord ∾ 24 juin 2005

Exercice 1 **4 points**

1. Le triangle ABC est *rectangle et pas isocèle* car :

$$\begin{aligned}
AB &= |-3-\mathrm{i}-(-2+3\mathrm{i})| = |-1-4\mathrm{i}| = \sqrt{17}\\
AC &= |2,08+1,98\mathrm{i}-(-2+3\mathrm{i})| = |4,08-1,02\mathrm{i}| = \sqrt{17,6868}\\
BC &= |2,08+1,98\mathrm{i}-(-3-\mathrm{i})| = |5,08+2,98\mathrm{i}| = \sqrt{34,6868}
\end{aligned}$$

Alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

2. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est *une droite*, c'est la médiatrice de [AB] avec A et B d'affixes : -2 et 4i, car :

$$\begin{aligned}
|z'| = 1 &\iff |\frac{z-4\mathrm{i}}{z+2}| = 1\\
&\iff |z-4\mathrm{i}| = |z+2|\\
&\iff AM = BM
\end{aligned}$$

3. L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est : *une droite privée du point d'affixe* -2.

En effet, en posant $z = x + \mathrm{i}y$, on obtient :

$$\begin{aligned}
z' &= \frac{x+\mathrm{i}y-4\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}y+2}\\
&= \frac{x+\mathrm{i}(y-4)}{(x+2)+\mathrm{i}y}\\
&= \frac{(x+\mathrm{i}(y-4))((x+2)-\mathrm{i}y)}{(x+2)^2+y^2}\\
&= \frac{x(x+2)+y(y-4)+\mathrm{i}\left((y-4)(x+2)-xy\right)}{(x+2)^2+y^2}\\
&= \frac{x(x+2)+y(y-4)+\mathrm{i}\left(4x+2y+8\right)}{(x+2)^2+y^2}
\end{aligned}$$

Or pour que z' soit réel il faut que sa partie imaginaire soit nulle, donc $4x + 2y + 8 = 0$ avec $z \neq -2$.

Comme de plus ce point d'affixe -2 appartient à la droite d'équation $4x + 2y + 8 = 0$, alors CDFQ.

4. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est :

$$\begin{aligned}
z &= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}(z - z_D) + z_D\\
&= \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)(z-\mathrm{i}) + \mathrm{i}\\
&= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \mathrm{i}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{i}\\
&= \left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}
\end{aligned}$$

Exercice 2 **6 points**

1. f est une fraction rationnelle, donc dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition, et :

$$f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Donc f est croissante sur $[0;2]$, et comme f est continue l'image de $[1;2]$ par f est
$[f(1)\ ;\ f(2)] = [\frac{3}{2}\ ;\ \frac{5}{3}] \subset [1\ ;\ 2]$, ainsi :

$$\text{si } x \in [1\ ;\ 2] \text{ alors } f(x) \in [1\ ;\ 2].$$

2. **a.** Voir le graphique.

b. Soit P_n la proposition de récurrence : $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
Initialisation : comme $v_0 = 2$ alors P_0 est vraie au rang 0.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons P_n vraie, alors $1 \leqslant v_n \leqslant 2$, donc $1 \leqslant f(v_n) \leqslant 2$, d'après la relation démontrée à la question 1.
Ainsi si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie
La proposition est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence P_n est vraie quel que soit le naturel n.
Ainsi pour tout entier naturel n, $1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
Soit Q_n la proposition de récurrence : $v_{n+1} \leqslant v_n$.
Or $v_1 = f(v_0) = f(2) = \frac{5}{3}$ donc $v_1 \leqslant v_0$. Donc Q_0 est vraie.
Supposons Q_n vraie, alors $v_{n+1} \leqslant v_n$, mais v_n et v_{n+1} sont deux nombres de $[0;2]$, donc comme f est croissante sur $[0;2]$, alors :

$$f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n) \iff v_{n+2} \leqslant v_{n+1}$$

Donc Q_{n+1} est vraie.
Ainsi, si Q_n est vraie alors Q_{n+1} est vraie, mais Q_0 est vraie, donc pour tout n, Q_n est vraie.
Ainsi pour tout entier naturel n, $v_{n+1} \leqslant v_n$.
On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

c.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{2v_n+1}{v_n+1} - \frac{2u_n+1}{u_n+1} \\ &= \frac{(2u_n+1)(v_n+1)-(2u_n+1)(v_n+1)}{(v_n+1)(u_n+1)} \\ &= \frac{2u_nv_n+u_n+2v_n+1-2u_nv_n-2u_n-v_n-1}{(u_n+1)(v_n+1)} \\ &= \frac{v_n-u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} \end{aligned}$$

Soit R_n la relation de récurrence : $v_n - u_n \geqslant 0$
Or $v_0 - u_0 = 2 - = 1$, donc R_0 est vraie.
Supposons R_n vraie, alors $v_n - u_n \geqslant 0$, mais :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{\overbrace{v_n - u_n}^{>0}}{\left(\underbrace{v_n+1}_{>0}\right)\left(\underbrace{u_n+1}_{>0}\right)}.$$

Donc $v_{n+1} - u_{n+1} > 0$.
Ainsi, si R_n est vraie alors R_{n+1} est vraie, mais R_0 est vraie, donc pour tout n, R_n est vraie.
Ainsi pour tout entier naturel $v_n - u_n \geqslant 0$.
Comme $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, alors $2 \leqslant u_n + 1 \leqslant 3$ et $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{u_n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
De même, $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{v_n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
Or

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)} \Rightarrow v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{4}.$$

d. En procédant par récurrence, on démontre que pour tout entier naturel n :

$$v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n \underbrace{(v_0 - u_0)}_{=1}$$

e. Comme la suite (u_n) est croissante ($u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée par 2, alors u est convergente.
Comme la suite (v_n) est décroissante ($v_n \geqslant v_{n+1}$) et minorée par 1, alors v est convergente.
Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$

et comme pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$,
alors d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0 \quad \underbrace{\iff}_{u \text{ et } v \text{ convergent}} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Donc les suites (u_n) et (v_n) convergent vers le même réel α.
Comme f est continue, $u_{n+1} = f(u_n)$ et u converge vers α, alors :

$$\begin{aligned} \alpha = f(\alpha) &\iff \alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} \\ &\iff \alpha(\alpha+1) = 2\alpha+1 \\ &\iff \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \\ &\iff \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Or comme $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 3 **5 points**

1. a. On a $f(x) = (x-1)\left(2 - e^{-x}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - e^{-x} = 2 \end{array}\right\} \text{donc par produit, } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

b. Comme $f(x) - (2x-2) = -\frac{(x-1)}{e^x}$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (2x-2) = 0$.
Donc la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

c. Comme

$$\begin{aligned} f(x) \leqslant 2x - 2 &\iff -\frac{(x-1)}{e^x} \leqslant 0 \\ &\iff -(x-1) \leqslant 0 \\ &\iff x \geqslant 1 \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ sur $[1\ ;\ +\infty[$

2. **a.**

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\times\left(2-\mathrm{e}^{-x}\right)+(x-1)\times\mathrm{e}^{-x}\\ &= 2-\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}\\ &= x\mathrm{e}^{-x}+2\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\end{aligned}$$

b. Pour tout réel x strictement positif, $-x<0$ donc $\mathrm{e}^{-x}<\mathrm{e}^{0} \iff \mathrm{e}^{-x}<1$
Ainsi si $x>0$, $1-\mathrm{e}^{-x}>0$ et $x\mathrm{e}^{-x}>0$, alors $f'(x)>0$.

c. Tableau de variations de f :

3. Sur $[1,3]$ la droite Δ est située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$. L'aire, en unité d'aire, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$ est égal à l'intégrale I suivante :
$I=\displaystyle\int_1^3 (2x-2-f(x))\,\mathrm{d}x=\int_1^3 (x-1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$
On intègre I par parties, en posant : $\begin{cases} u'(x)=\mathrm{e}^{-x} & u(x)=-\mathrm{e}^{-x}\\ v(x)=x-1 & v'(x)=1\end{cases}$
$I=\left[(x-1)\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_1^3-\displaystyle\int_1^3 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\left[-(x-1)\mathrm{e}^{-x}\right]_1^3-\left[\mathrm{e}^{-x}\right]_1^3=\left[-x\mathrm{e}^{-x}\right]_1^3=$ $\mathrm{e}^{-1}-3\mathrm{e}^{-3}$
Ainsi l'aire cherchée est en unités d'aire : $I=\mathrm{e}^{-1}-3\mathrm{e}^{-3}$.
L'unité d'aire étant 4 cm^2, on a donc finalement :

$$I=4\left(\mathrm{e}^{-1}-3\mathrm{e}^{-3}\right)\approx 0,87\ \text{cm}^2$$

4. **a.** Pour déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ, il faut que les coefficients directeurs soient égaux, donc :

$$\begin{aligned} f'(x)=2 &\iff x\mathrm{e}^{-x}+2\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)=2\\ &\iff x\mathrm{e}^{-x}-2\mathrm{e}^{-x}=0\\ &\iff \mathrm{e}^{-x}(x-2)=0\\ &\iff x=2\end{aligned}$$

Ainsi le point A de coordonnées $\left(2\ ;\ 2-\mathrm{e}^{-2}\right)$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ.

b. Comme la droite Δ a pour équation $2x-y-2=0$, alors la distance de A à Δ est :

$$\frac{|2\times 2-(2-\mathrm{e}^{2})-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{5}}$$

Exercice 4 **5 points**

1. **a.** Si le dé indique 1, alors la probabilité de gagner est de $\frac{4}{10}$. Donc :

$$p_{D_1}(G)=\frac{4}{10}.$$

Si le dé indique 2, alors la probabilité de gagner est de $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{2}{15}$. Donc :

$$p_{D_2}(G)=\frac{2}{15}.$$

Si le dé indique 3, alors la probabilité de gagner est de $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{30}$. Donc :

$$p_{D_3}(G)=\frac{1}{30}.$$

b. Comme $p(G) = p(G \cap D_1) + p(G \cap D_2) + p(G \cap D_3) =$
$p(D_1) \times p_{D_1}(G) + p(D_2) \times p_{D_2}(G) + p(D_3) \times p_{D_3}(G)$, alors

$$p(G) = \frac{23}{180}.$$

2. Un joueur a gagné la partie. Alors la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé est

$$p_G(D_1) = \frac{p(D_1 \cap G)}{p(G)} = \frac{12}{23}.$$

3. Un joueur fait six parties. Comme il remet les boules tirées dans l'urne après chaque partie, les parties sont considérées comme indépendantes.

Désignons par X la variable aléatoire désignant le nombre de parties gagnées sur 6 jouées. Alors puisque les parties sont indépendantes, on répète de manière indépendante la même expérience aléatoire (jouer une partie) à deux issues (gagner ou perdre). Alors X suit une loi binomiale de paramètres 6 et $\frac{23}{180}$.
Ainsi la probabilité qu'il gagne exactement deux parties est :

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}\left(\frac{23}{180}\right)^2 \times \left(1 - \frac{23}{180}\right)^4 \approx 0,14$$

Pour déterminer le nombre minimal de parties qu'un joueur doit faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9, résolvons :

$$\begin{aligned}
P(X \geqslant 1) \geqslant 0,9 &\iff 1 - P(X < 1) \geqslant 0,9 \\
&\iff 1 - P(X = 0) \geqslant 0,9 \\
&\iff 1 - \left(1 - \frac{23}{180}\right)^n \geqslant 0,9 \\
&\iff \left(\frac{157}{180}\right)^n \leqslant 0,1 \\
&\iff \ln\left(\frac{157}{180}\right)^n \leqslant \ln 0,1 \\
&\iff n \ln\left(\frac{157}{180}\right) \leqslant \ln 0,1 \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln 0,1}{\ln\left(\frac{157}{180}\right)} \\
&\iff n \geqslant 16,8
\end{aligned}$$

Ainsi, le nombre minimal cherché est $n = 17$.

Corrigé : Patrick Baril