Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord mai 2006

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. L'espérance de ce jeu est égale à :

$$(60-30)\times\frac{4}{10}+(0-30)\times\frac{3}{10}+(20-30)\times\frac{3}{10}=\frac{120-90-30}{10}=0.$$

Le jeu est donc équitable.

2. On a une épreuve de Bernoulli avec $n=4$ et $p=\frac{4}{10}$.
Tirer au moins une fois un bulletin oui est l'évènement contraire de l'évènement : « ne jamais tirer un oui », dont la probabilité est $\left(1-\frac{4}{10}\right)^4=\frac{81}{625}$.
La probabilité cherchée est donc :

$$1-\frac{81}{625}=\frac{544}{625}.$$

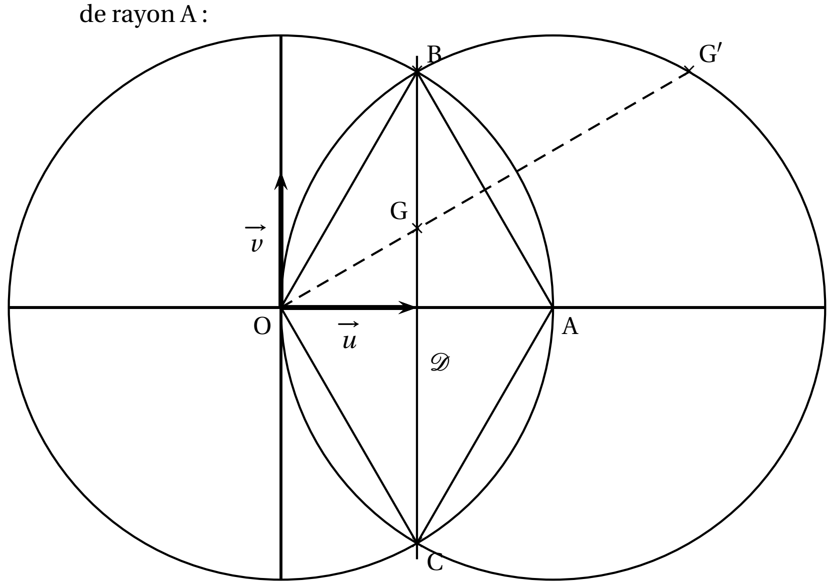
3. Il y a $\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!\times 8!}=\frac{10\times 9}{2}=45$ tirages différents.
Les possibilités de tirages différents sont : oui-non, oui-blanc et non-blanc donc en nombre égal à $4\times 3+4\times 3+3\times 3=33$. La probabilité cherchée est donc : $\frac{33}{45}=\frac{11}{15}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

1. **a.** $|z_B|^2=1+3=4\Longrightarrow |z_B|=2$. Donc $z_B=2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et comme $z_C=\overline{z_B}$, on a donc $z_C=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   b. Pour placer les points B et C on trace les deux cercles de centre O et A et de rayon A :



2. On a $z_{\text{OB}} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$ et $z_{\text{CA}} = 2 - (1 - \text{i}\sqrt{3} = 1 + \text{i}\sqrt{3}$. Donc $\overrightarrow{\text{OB}} = \overrightarrow{\text{CA}} \iff$ OABC est un parallélogramme et comme OB = OC (question 1. a.) le quadrilatère OABC est un losange.

3. On sait que $|z| = |z-2| \iff |z-0| = |z-2| \iff \text{O}M = \text{A}M \iff M$ est équidistant de O et de A, donc que M appartient à la droite $\mathcal{D}$ médiatrice du segment [OA], c'est-dire d'après la question précédente la droite (BC).

Partie B

1. a. Pour $z \neq 2$, $z = \dfrac{-4}{z-2} \iff z^2 - 2z + 4 = 0 \iff (z-1)^2 - 1 + 4 = 0 \iff$ $(z-1)^2 + 3 = 0 \iff (z-1)^2 = -3 \iff \left\{\begin{array}{l} z_1 = 1 + \text{i}\sqrt{3} = z_{\text{B}} \\ z_2 = 1 - \text{i}\sqrt{3} = z_{\text{C}} \end{array}\right.$.

Les solutions sont donc les affixes des points B et C qui sont donc les points invariants de l'application qui à z fait correspondre $z' = \dfrac{-4}{z-2}$.

b. On vient de voir que $\text{B}' = \text{B}$ et que $\text{C}' = \text{C}$.

c. On sait que $z_{\text{G}} = \dfrac{1}{3}(z_{\text{O}} + z_{\text{A}} + z_{\text{B}}) = 1 + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Donc $z_{\text{G}'} = \dfrac{-4}{1 + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{3} - 2} =$ $\dfrac{4}{-1 + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{3}} = 3 + \text{i}\sqrt{3}$.

Remarque : $z_{\text{G}'} = 3z_{\text{G}} \iff \overrightarrow{\text{OG}'} = 3\overrightarrow{\text{OG}} \iff$ O, G et G′ sont alignés.

2. a. Question de cours :

- $|z_1 \times z_2|^2 = z_1 \times z_2 \times \overline{z_1 \times z_2} = z_1 \times z_2 \times \overline{z_1} \times \overline{z_2} = z_1 \times \overline{z_1} \times z_2 \times \overline{z_2} =$ $|z_1|^2 \times |z_2|^2$. Conclusion : $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left|\dfrac{1}{z} \times z\right| = \left|\dfrac{1}{z}\right| \times |z|$ (d'après le point précédent) $= |1| = 1$. Donc pour $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

b. $|z'-2| = \left|\dfrac{-4}{z-2} - 2\right| = \left|\dfrac{-4-2z+4}{z-2}\right| = \left|\dfrac{-2z}{z-2}\right| = \dfrac{|-2z|}{|z-2|} = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

c. On sait que $M \in \mathcal{D} \iff |z| = |z-2|$. En utilisant l'égalité précédemment démontrée, on a donc $|z'-2| = 2 \iff M' \in \Gamma$, Γ étant le cercle de centre A et de rayon 2.

Remarque : en particulier, comme $\text{G} \in \mathcal{D}, \text{G}' \in \Gamma$.

Donc G′ est le point d'intersection de la droite (OG) et du cercle Γ.

EXERCICE 2 — 5 points

Exercice de spécialité

1. a. La composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre est une similitude de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

b. Si M_1 est l'image de M par r, son affixe est z_1, telle que $z_1 - 2 = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}(z-2)$. L'image de M_1 par h est M' d'affixez'telle que :

$z' - 2 = 3(z_1 - 2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}(z-2)\right] = (z-2)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}(1+\text{i})(z-2)$.

D'où

$z' = 2 + \dfrac{(1+\text{i})}{2}z - 1 - \text{i} = \dfrac{1+\text{i}}{2}z + 1 - \text{i}$.

c. L'égalité précédente peut s'écrire :

$2z' = (1+\text{i})z + 2 - 2\text{i} \iff 2(1-\text{i})z' = 2z + (2-2\text{i})(1-\text{i}) \iff 2(1-\text{i})z' =$ $2z + 2 \times (-2\text{i}) \iff (1-\text{i})z' = z - 2\text{i} \iff -\text{i}z' + 2\text{i} = z - z' \iff \text{i}(2-z') = z - z'$.

2. **a. Question de cours**

D'après les propriétés de la rotation : Si P $\neq$ A, AQ = AP $\iff \dfrac{\text{AQ}}{\text{AP}} = 1 \iff \dfrac{|q-a|}{|p-a|} = 1 \iff \left|\dfrac{q-a}{p-a}\right| = 1$. D'autre part : $\left(\overrightarrow{\text{AP}},\ \overrightarrow{\text{AQ}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \iff \arg\dfrac{q-a}{p-a} = \dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion : $\dfrac{q-a}{p-a} = \text{i} \iff q-a = \text{i}(p-a)$.

b. D'après la question 1. c. $z - z' = \text{i}(2-z') \iff M$ d'affixe z est l'image de A dans le quart de tour direct de centre M', autrement dit le triangle $\Omega M M'$ est un triangle rectangle isocèle en M', $M \neq \Omega$.

3. Démontrons la relation par récurrence :

Initialisation : pour $n = 0$, $\text{A}_0(2+\text{i}$ et en appliquant la relation au rang 0 : $a_0 = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} + 2 = \text{i} + 2$. La relation est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons la relation vraie au rang n :

$a_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \text{e}^{\text{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$.

D'après la question 1. b., on a $a_{n+1} = \dfrac{1+\text{i}}{2} a_n + 1 - \text{i} = \dfrac{1+\text{i}}{2} \times \left[\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \text{e}^{\text{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2\right] + 1 - \text{i}$.

Or $\dfrac{1+\text{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}$. Donc en reportant :

$a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}\left[\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \text{e}^{\text{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2\right] + 1 - \text{i} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \text{e}^{\text{i}\frac{(n+3)\pi}{4}} + 2\left(\dfrac{1+\text{i}}{2}\right) + 1 - \text{i} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1} \text{e}^{\text{i}\frac{(n+3)\pi}{4}} + 2$. La relation est donc vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$. On a donc démontré par le principe de récurrence que la relation est vraie pour tout naturel n.

4. On a donc $a_5 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 \text{e}^{\text{i}\frac{(5+2)\pi}{4}} + 2 = \dfrac{17}{8} - \text{i}\dfrac{1}{8}$.

5. $A_n\Omega < 0{,}01 \iff \left|\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \text{e}^{\text{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2 - 2\right| < 0{,}01 \iff \left|\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \text{e}^{\text{i}\frac{(n+2)\pi}{4}}\right| < 0{,}01$

$$\iff \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 0{,}01 \iff n\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) > \ln 0{,}01 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} \approx 13{,}2.$$

On a donc $n_0 = 13$.

EXERCICE 3 **5 points**

1. — Limites : On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{2}{x} = -\infty$, d'où par somme $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.

De même $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{2}{x} = 0$, d'où par somme $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

— Variations : g est une somme de fonctions dérivables : $g'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$ somme de deux termes positifs. La dérivée est positive : la fonction g est croissante.

— Annulation : La fonction g est continue, car dérivable sur $[2,3~;~2,4]$, croissante sur cet intervalle ; la calculatrice donne $g(2,3) \approx -0,04$ et $g(2,4) \approx 0,04$. Conclusion : la fonction g s'annule en un point unique $x_0 \in [2,3~;~2,4]$

2. a. On a donc $g(x_0) = \ln x_0 - \dfrac{2}{x_0} = 0 \iff \ln x_0 = \dfrac{2}{x_0}$.

D'autre part $f(x_0) = \dfrac{5\ln x_0}{x_0} = \dfrac{5\dfrac{2}{x_0}}{x_0} = \dfrac{10}{x_0^2}$.

b. Soit $\mathcal{A}(a) = \displaystyle\int_1^a \dfrac{5\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = 5\int_1^a \dfrac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ et intégrons par parties :

$$\left\{\begin{array}{ll} u(t) = \ln t & v'(t) = \dfrac{1}{t} \\ u'(t) = \dfrac{1}{t} & v(t) = \ln t \end{array}\right.$$

$\mathcal{A}(a) = \left[(\ln t)^2\right]_1^a - \displaystyle\int_1^a \dfrac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$. Donc $2\mathcal{A}(a) = (\ln a)^2$ et enfin $\mathcal{A}(a) = \dfrac{(\ln a)^2}{2}$.

Remarque : on pouvait aussi remarquer que la fonction à intégrer est de la forme $u' \times u$ donc a pour primitive $\dfrac{u^2}{2}$ avec $u(t) = \ln t$.

3. D'après la question 1, P_0 a pour abscisse x_0, donc d'aprèslaquestion 2. M_0 apour coordonnées $\left(x_0~;~\dfrac{10}{x_0^2}\right)$ et enfin $H_0\left(0~;~\dfrac{10}{x_0^2}\right)$.

D'où $\mathcal{A}(\mathcal{D}_1) = \displaystyle\int_1^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{5}{2}(\ln x_0)^2 = \dfrac{5}{2}\left(\dfrac{4}{x_0^2}\right) = \dfrac{10}{x_0^2} = f(x_0) = \mathcal{A}(\mathcal{D}_2)$.

En partant de l'encadrement donné :

$$2,3 < x_0 < 2,4 \Longrightarrow$$

$$2,3^2 < x_0^2 < 2,4^2 \Longrightarrow$$

$$\dfrac{1}{2,4^2} < \dfrac{1}{x_0^2} < \dfrac{1}{2,3^2} \Longrightarrow$$

$$10 \times \dfrac{1}{2,4^2} < 10 \times \dfrac{1}{x_0^2} < 10 \times \dfrac{1}{2,3^2}$$

Soit finalement : $1,736 < \dfrac{10}{x_0^2} < 1,891$. Conclusion : $1,7 < \mathcal{A}(\mathcal{D}_1) < 1,9$ à 0,2 près.

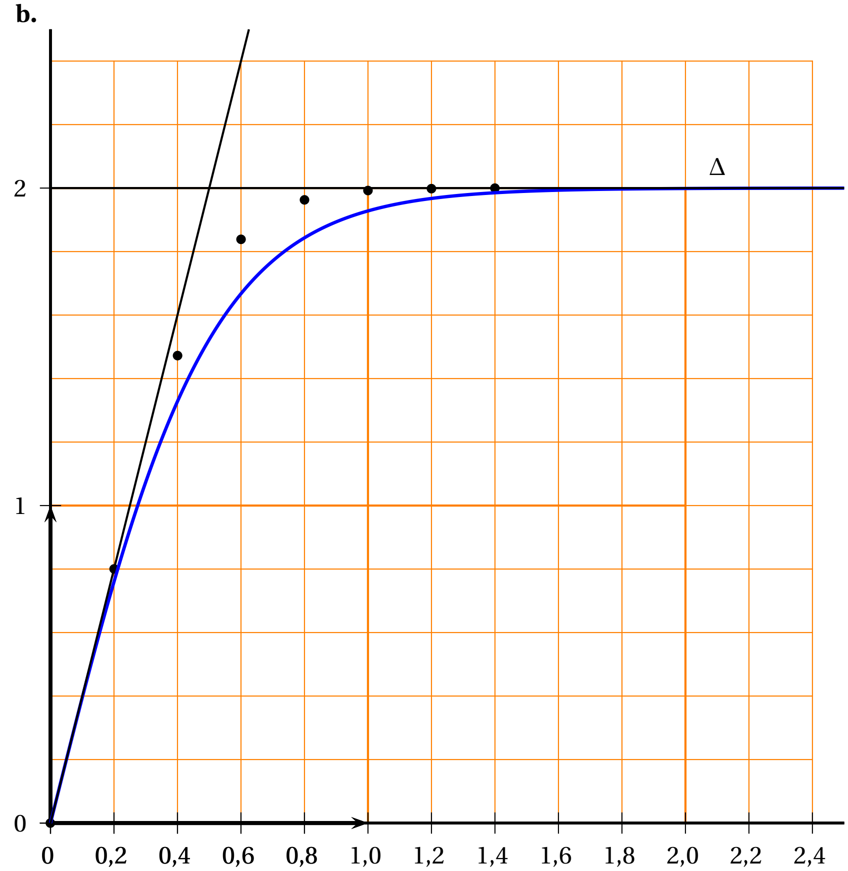
EXERCICE 4 — 7 points

Partie A. Étude d'une suite

1. a.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4
y_n	0	0,800 0	1,472 0	1,838 6	1,962 5	1,992 2	1,998 4	1,999 7

b.



c. D'après ce graphique, la suite semble croissante et converger vers 2.

2. a. On a $p'(x) = -0,4x + 1$ qui s'annule pour $x = \dfrac{5}{2}$. Si $0 \leqslant x \leqslant 2$, la fonction est croissante de $p(0) = 0,8$ à $p(2) = 2$.

Conclusion : si $x \in [0\,;\,2]$, $p(x) \in [0\,;\,2]$.

b. Par récurrence :

— *Initialisation* : $y_0 = 0 \in [0\,;\,2]$.

— *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $y_n \in [0\,;\,2]$; on sait que $y_{n+1} = p\left(y_n\right) \in [0\,;\,2]$ d'après la question précédente.
L'appartenance est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$: on a donc démontré la récurrence.

c. On a $y_{n+1} - y_n = -0,2y_n^2 + y_n + 0,8 - y_n = -0,2y_n^2 + 0,8$. Or

$$0 \leqslant 2 \Longrightarrow$$

$$0 \leqslant y_n^2 \leqslant 4 \Longrightarrow$$

$$-0,8 \leqslant -0,2y_n^2 \leqslant 0 \Longrightarrow$$

$$0 \leqslant -0,2y_n^2 + 0,8 \leqslant \ldots$$

Conclusion : $y_{n+1} - y_n \geqslant 0 \Longrightarrow$ la suite $\left(y_n\right)$ est croissante.

d. La suite $\left(y_n\right)$ est croissante et majorée par 2 : elle est donc convergente.

Partie B. Étude d'une fonction

1. En posant $u(x) = \mathrm{e}^{4x}$, on a $g'(x) = 2\left[\dfrac{u'(u+1) - u'(u-1)}{(u+1)^2}\right] = \dfrac{4u'}{(u+1)^2} = \dfrac{16\mathrm{e}^{4x}}{\left(\mathrm{e}^{4x}+1\right)^2}$.

D'autre part : $4 - g(x)^2 = 4 - 4\left(\dfrac{\left(\mathrm{e}^{4x}-1\right)^2}{\left(\mathrm{e}^{4x}+1\right)^2}\right) = \dfrac{16\mathrm{e}^{4x}}{\left(\mathrm{e}^{4x}+1\right)^2}$.

De plus $g(0) = 2 \times (1-1) = 0$.

La fonction g vérifie les conditions (1) et (2).

2. a. On a $g(x) = 2\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-4x}}{1+\mathrm{e}^{-4x}}\right)$. On a donc :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$.

La droite Δ d'équation $y = 2$ est donc asymptote horizontale à $\left(\mathscr{C}_g\right)$ au voisinage de plus l'infini.

b. L'écriture trouvée pour $g'(x)$ montre que cette dérivée est positive : la fonction g est donc croissante sur $[0~;~+\infty[$. On a déjà $g(0) = 0$. On a donc :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$.

Sur $[0~;~+\infty[$, la fonction g croît de 0 à 2.

3. Le nombre dérivé en 0 est $g'(0) = \dfrac{16}{4} = 4$. L'équation de la tangente à $\left(\mathscr{C}_g\right)$ en l'origine est donc puisque $g(0) = 0$, $y = 4x$.

Les coordonnées du point commun à $y = 2$ et $y = 4x$ sont $x = \dfrac{1}{2}$, $y = 2$. On a donc $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

4. Voir ci-dessus. (On constate les limites de la méthode d'Euler ...)