

Corrigé du baccalauréat S Amérique du Nord
juin 2000

EXERCICE 1

5 points

1. a. Pour tout point M d'affixe z , $z' = -\frac{1}{z} \Rightarrow |z'| = \left| -\frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ ou encore $|z| \times |z'| = 1$.

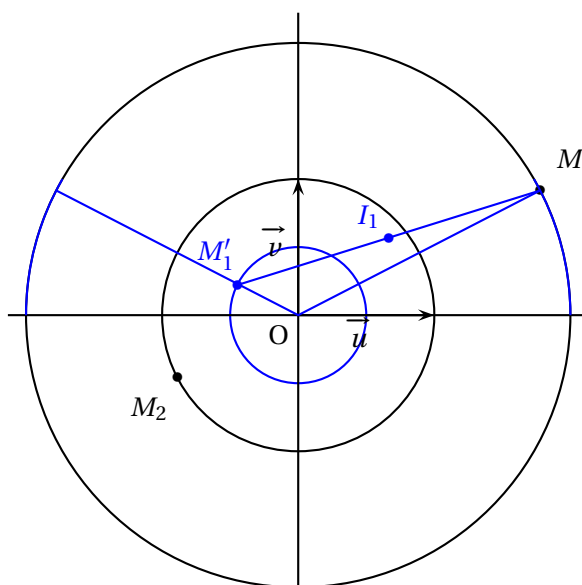
Les modules de z et de z' sont donc inverses.

Pour tout point M d'affixe z , $z' = -\frac{1}{z} \Rightarrow \arg(z') = \arg\left(-\frac{1}{z}\right) = \arg\left(\frac{-1}{z}\right) = \arg(-1) - \arg(z) = \pi - \arg(z)$ ou $\arg(z) + \arg(z') = \pi$.

Les arguments de z et de z' sont supplémentaires.

- b. D'après la question précédente $|z'_1| = \frac{1}{2}$ et $\arg(z'_1) = \pi - \alpha$, α étant un argument de z_1 . D'où la construction :

- on construit le symétrique de M_1 autour de l'axe des ordonnées;
- le segment qui joint ce symétrique au point O coupe le cercle centré en O de rayon $\frac{1}{2}$ au point M'_1 ;
- on construit ensuite classiquement le milieu de $[M_1 M'_1]$



2. Pour cette question, θ est un réel et M est le point d'affixe $z = e^{i\theta}$.

- a. D'après la question 1. a., $z' = e^{i(\pi-\theta)}$ et l'affixe du point I est donc $\frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{i(\pi-\theta)}) = \frac{1}{2}(\cos \theta + i \sin \theta + \cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)) = \frac{1}{2}(\cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta + i \sin \theta) = i \sin \theta$.

C'est donc un imaginaire pur. L'ordonnée de I est donc égale à celle de M .

- b. Il suffit pour obtenir I de projeter M_2 sur l'axe des ordonnées.

Comme $-1 \leq \sin \theta \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin \theta \leq 2$, l'ensemble décrit par le point I est le segment limité par les points $(0; 2)$ et $(0; -2)$.

3. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O .

a. M et I sont confondus $\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) \Leftrightarrow 2z = z - \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{z} \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = i \\ z = -i \end{cases}$.

Il y a donc deux points solutions : $(0; 1)$ et $(0; -1)$.

b. $(z - 2i)^2 + 3 = z^2 - 4 - 4iz + 3 = z^2 - 1 - 4iz$.

L'affixe de I est $2i \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) = 2i \Leftrightarrow z - \frac{1}{z} = 4i \Leftrightarrow z^2 - 1 = 4iz \Leftrightarrow z^2 - 1 - 4iz = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)^2 + 3 = 0$ d'après la question précédente. Or

$$(z - 2i)^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (z - 2i)^2 = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2i = i\sqrt{3} \\ z - 2i = -i\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = i(2 + \sqrt{3}) \\ z = i(2 - \sqrt{3}) \end{cases}$$

4. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O , d'affixe

$z = x + iy$ (x et y réels).

a. On sait que l'affixe de I est $\frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left(x + iy - \frac{1}{x + iy} \right) =$

$$\frac{1}{2} \left(x + iy - \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} \right) = \frac{1}{2} \left(x + iy - \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{(x + iy)(x^2 + y^2) - (x - iy)}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3 + xy^2 - x + i(x^2y + y^3 + y)}{x^2 + y^2} \right).$$

La partie réelle de l'affixe de I est donc : $\frac{1}{2} \left(\frac{x^3 + xy^2 - x}{x^2 + y^2} \right)$ et

la partie imaginaire de l'affixe de I est donc $\frac{1}{2} \left(\frac{x^2y + y^3 + y}{x^2 + y^2} \right)$.

b. I appartient à l'axe des abscisses si et seulement son ordonnée est nulle, soit

$$\frac{x^2y + y^3 + y}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2y + y^3 + y = 0 \Leftrightarrow y(x^2 + y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$y = 0$ représente l'axe des abscisses; or $x^2 + y^2 + 1 \geq 1 > 0$: il n'existe pas de points tels que $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Les points solutions sont donc les points de l'axe des abscisses.

c. I appartient à l'axe des ordonnées si et seulement son abscisse est nulle, soit

$$x^3 + xy^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ représente l'axe des ordonnées; $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est une équation du cercle centré en O de rayon 1.

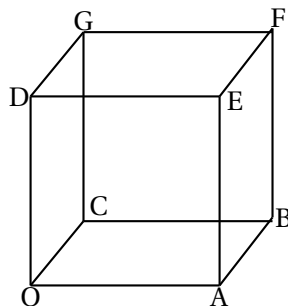
Les points solutions sont les points de l'axe des ordonnées et les points du cercle unitaire.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

Hors programme en 2016



Soit le cube OABCDEFGH représenté par la figure ci-dessus.

L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$. On désigne par a un réel strictement positif.

L , M et K sont les points définis par $\overrightarrow{OL} = a\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OA}$, et $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BF}$.

1.
 - a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DM} \wedge \overrightarrow{DL}$.
 - b. En déduire l'aire du triangle DLM .
 - c. Démontrer que la droite (OK) est orthogonale au plan (DLM) .
2. On note H le projeté orthogonal de O (et de K) sur le plan (DLM) .
 - a. Démontrer que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OK}$.
 - b. Les vecteurs $\overrightarrow{OH}$ et $\overrightarrow{OK}$ étant colinéaires, on note λ le réel tel que $\overrightarrow{OH} = \lambda \overrightarrow{OK}$.
Démontrer que $\lambda = \frac{a}{a^2 + 2}$. En déduire que H appartient au segment $[OK]$.
 - c. Déterminer les coordonnées de H .
 - d. Exprimer $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{OK}$. En déduire que $HK = \frac{a^2 - a + 2}{\sqrt{a^2 + 2}}$.
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer le volume du tétraèdre $DLMK$ en fonction de a .

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

Hors programme en 2016

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB , rectangle et isocèle en O .

On a donc $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\frac{\pi}{2}$ et S_O la symétrie de centre O .

On place un point C , non situé sur la droite (AB) , on trace les carrés $BEDC$ et $ACFG$ directs. On a donc $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

1.
 - a. Déterminer $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$ composée des réflexions d'axes (AB) et (AO) .
 - b. En écrivant R_B sous la forme d'une composée de deux réflexions, démontrer que $R_A \circ R_B = S_O$.
2.
 - a. Déterminer l'image de E par $R_A \circ R_B$.
 - b. En déduire que O est le milieu du segment $[EG]$.
 - c. On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle. Étudier l'image de C par la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$. Déterminer la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$.
 - d. Placer H le symétrique de D par rapport à O .
Démontrer que $R_F(H) = D$. Démontrer que le triangle FOD est rectangle et isocèle en O .

PROBLÈME

10 points

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) &= \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0 \\ f(0) &= 0. \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 5 cm).

Partie A

1. Pour $x > 0$, $\frac{x^2 + x + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = 1$.

D'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$, donc par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$ et par produit de limites :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, ce qui signifie que la droite (Δ) d'équation $y = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

2. $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x) - 0}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 + x + 1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}$.

Or $\frac{x^2 + x + 1}{x^3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ et clairement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$, par produit de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ signifie que la fonction f est dérivable en 0 et que son nombre dérivé est nul. La tangente à l'origine est horizontale.

3. On a vu que $f'(0) = 0$, donc pour $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{x^2(2x+1) - 2x(x^2+x+1)}{x^4} e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^2} = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 - 2x}{x^4} + \frac{x^2+x+1}{x^4} \right) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{-x+1}{x^4} \right).$$

4. On sait quel que soit le réel x , $e^{-\frac{1}{x}} > 0$: le signe de $f''(x)$ est donc celui de $1 - x$.

Donc sur $]0; 1[$, $f'(x) > 0$: la fonction est strictement croissante sur $]0; 1[$; et

sur $[1; +\infty[$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur $[1; +\infty[$.

$f(1)$ est donc le maximum de f sur $[0; +\infty[$ et $f(1) = \frac{1+1+1}{1^2} e^{-1} = 3e^{-1} = \frac{3}{e}$. D'où le tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\frac{3}{e}$	1

Partie B

On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$g(x) = f(x) - xf'(x).$$

1. On a $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} - \frac{(1-x)}{x^3} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x^3 + x^2 + x - 1 + x}{x^3} \right) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^3} \right)$.

Donc $g(x) = 0 \iff e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{x^3 + x^2 + 2x - 1}{x^3} \right) = 0 \iff x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$ car on sait que quel que soit $u \in \mathbb{R}$, $e^u > 0$.

2. Soit h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$.

Cette fonction polynôme est dérivable et sur $]0; +\infty[$, on a

$h'(x) = 3x^2 + 2x + 2$: on a clairement $h'(x) \geq 2 > 0$ car tous les termes sont positifs : la fonction h est donc croissante de $h(0) = -1$ à plus l'infini.

Elle s'annule donc pour une valeur unique $\alpha \in]0; +\infty[$ telle que $h(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne $h(0,39) \approx -0,0086$ et $h(0,40) \approx 0,024$, donc

$$0,39 < \alpha < 0,40.$$

3. D'après la question 1., $g(\alpha) = 0$ soit $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) = \alpha f'(\alpha) \iff \frac{f(\alpha)}{\alpha} = f'(\alpha) = A$.

$$\text{Or } f'(\alpha) = e^{-\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{-\alpha + 1}{\alpha^4} \right).$$

$$\text{On a } 0,39 < \alpha < 0,40 \iff \frac{1}{0,4} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,39} \iff$$

$$-\frac{1}{0,39} < -\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{0,40} \iff e^{-\frac{1}{0,39}} < e^{-\frac{1}{\alpha}} < e^{-\frac{1}{0,40}}.$$

La calculatrice donne : $0,677 < e^{-\frac{1}{\alpha}} < 0,679$.

$$\text{D'autre part : } 0,39 < \alpha < 0,40 \iff -0,40 < -\alpha < -0,39 \iff$$

$$1 - 0,40 < 1 - \alpha < 1 - 0,39 \iff 0,6 < 1 - \alpha < 0,61 \text{ et}$$

$$0,39 < \alpha < 0,40 \iff 0,39^4 < \alpha^4 < 0,40^4 \text{ ou } 0,023134 < \alpha^4 < 0,0256 \iff \frac{1}{0,0256} <$$

$$\frac{1}{\alpha^4} < \frac{1}{0,023134} \text{ soit } 39,0625 < \frac{1}{\alpha^4} < 43,23.$$

$$\text{Donc } 0,677 \times 0,6 \times 15,9 < e^{-\frac{1}{\alpha}} \frac{-\alpha + 1}{\alpha^4} < 0,679 \times 0,61 \times 43,23.$$

Finalement $1,9 < A < 2,19$, soit l'encadrement à 2×10^{-1} près :

Puisque $A = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$ et que $g(\alpha) = 0$, soit $f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = 0$, donc

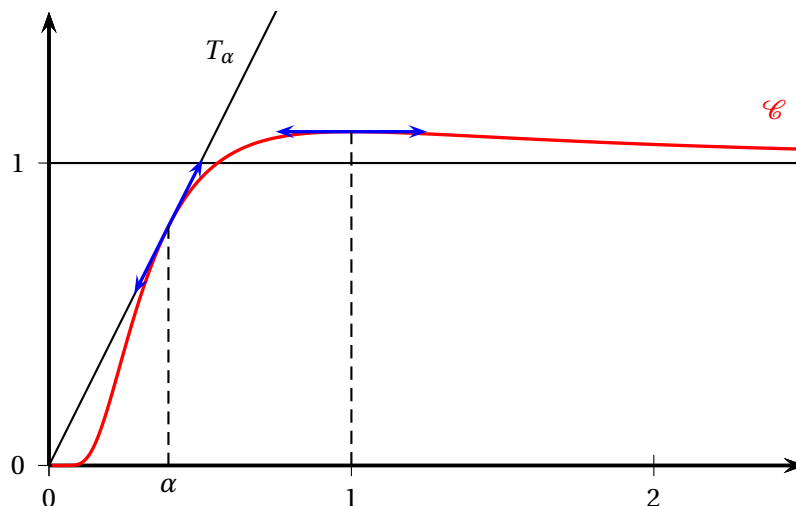
$$A = \frac{\alpha f'(\alpha)}{\alpha} = f'(\alpha).$$

4. La tangente T_α à la courbe $\mathcal{C}$ a pour équation :

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \text{ ou encore } y = f'(\alpha)x + f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) \text{ et finalement :}$$

$$y = Ax.$$

D'où la figure :



5. On a vu que l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a).$$

Cette droite contient l'origine si et seulement si $f(a) - af'(a) \iff a = \frac{f(a)}{f'(a)}$.

Or on a vu que seule α vérifie cette équation. Conclusion : T_α est la seule tangente à $\mathcal{C}$ qui contient l'origine O.

6. On admettra que T_α est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $]0; +\infty[$.

a. Graphiquement on voit que le nombre de solutions est :

- si $m < 0 : 0$
- si $0 \leq m \leq 1 : 1$
- si $1 < m < \frac{3}{e} : 2$
- si $m = \frac{3}{e} : 1$
- si $m > \frac{3}{e} : 0$

- b.
- si $m > A : 1$ solution 0
 - si $m = A : 2$ solutions 0 et α
 - si $0 < m < 3$ solutions dont 0
 - si $m \leq 0 : 1$ solution 0

Partie C

1. Comme $0 < n < n+1$, on a $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

Par linéarité de l'intégrale : $u_{n+1} - u_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^1 f(x) dx - \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx$:
c'est l'intégrale sur un intervalle croissant d'une fonction positive d'après les parties précédentes : c'est donc un nombre positif : $u_{n+1} - u_n > 0 \iff u_{n+1} > u_n$: la suite (u_n) est croissante.

2. Comme $x > 0$, la fonction h produit de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$h'(x) = e^{-\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}(x+1)e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = f(x) \text{ sur }]0; +\infty[.$$

h est donc une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

3. D'après la question précédente, on a donc :

$$u_n = [h(x)]_{\frac{1}{n}}^1 = h(1) - h\left(\frac{1}{n}\right) = (1+1)e^{-1} - \left(\frac{1}{n} + 1\right)e^{-\frac{1}{n}} = \frac{2}{e} - \left(\frac{1}{n} + 1\right)e^{-n}.$$

4. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + 1 = 1$, donc par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + 1\right)e^{-n} = 0$.

Conclusion par somme de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{e} \approx 0,736.$$