Corrigé du baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2006

EXERCICE 1 **5 points**

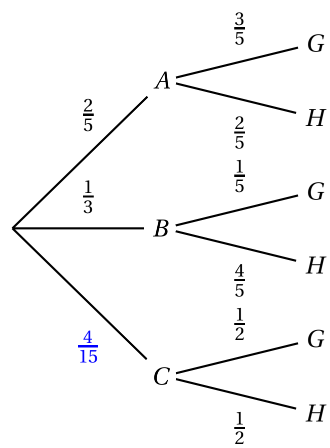
Commun à tous les candidats

Partie A Dans le service de soins A

1. La calculatrice donne avec des coefficients arrondis au dixième : $y = -1,7x + 52,7$.
2. Le mois de décembre 2006 correspond au rang $x = 12$, d'où $y = -1,7 \times 12 + 52,7 = 52,7 - 20,4 = 32,3 \approx 32$ à l'unité près

Partie B Dans l'ensemble des trois services de soins

1.



On a $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{15-6-5}{15} = \frac{4}{15}$.

2. Il faut calculer $p(B \cap H) = p(B) \times p_B(H) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$.
3. D'après la loi des probabilités totales on a :
$p(H) = p(A \cap H) + p(B \cap H) + p(C \cap H)$.
Or $p(A \cap H) = p(A) \times p_A(H) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.
De même $p(C \cap H) = p(C) \times p_C(H) = \frac{4}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{15}$.
Donc $p(H) = \frac{4}{25} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{12+20+10}{75} = \frac{42}{75} = \frac{14}{25} = \frac{56}{100} = 0,56$.
4. On a $p_H(B) = \dfrac{p(H \cap B)}{p(H)} = \dfrac{p(B \cap H)}{p(H)} = \dfrac{\frac{4}{15}}{\frac{14}{25}} = \frac{4}{15} \times \frac{25}{14} = \frac{10}{21}$.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

1. La dérivée de la fonction $x \longmapsto 2^x$ est la fonction $x \longmapsto 2^x \times \ln 2$. Fausse.
2. Il faut que $x > -1$, $x > -3$, $x > -\frac{5}{3}$, soit $x > -1$.
Dans ce cas : $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(3x+5) \iff \ln(x+1)(x+3) = \ln(3x+5) \iff (x+1)(x+3) = 3x+5 \iff x^2 + 3x + x + 3 = 3x + 5 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff (x-1)(x+2) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1 \\ x & = & -2 \end{array}\right.$
Mais -2 ne peut être solution car $-2 > -1$ est fausse. Vraie.

3. Si t est le taux d'accroissement moyen annuel, on a :

$\left(1\dfrac{t}{100}\right)^{20} = 1\dfrac{40}{100} \iff \left(1\dfrac{t}{100}\right)^{20} = 1,4 \iff 1\dfrac{t}{100} = 1,4^{\frac{1}{20}} \iff \dfrac{t}{100} = 1,4^{\frac{1}{20}} - 1 \iff$

$t = 100\left(1,4^{\frac{1}{20}} - 1\right) \approx 1,6966.$

Au centième près on a bien $t \approx 1,70$. Vraie.

4. La valeur moyenne sur l'intervalle $[0;4]$ de la fonction qui à x associe e^{-x} est égale à :

$\displaystyle\int_0^4 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^4 = -\mathrm{e}^{-4} - \left(-\mathrm{e}^{-0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-4}$. Fausse.

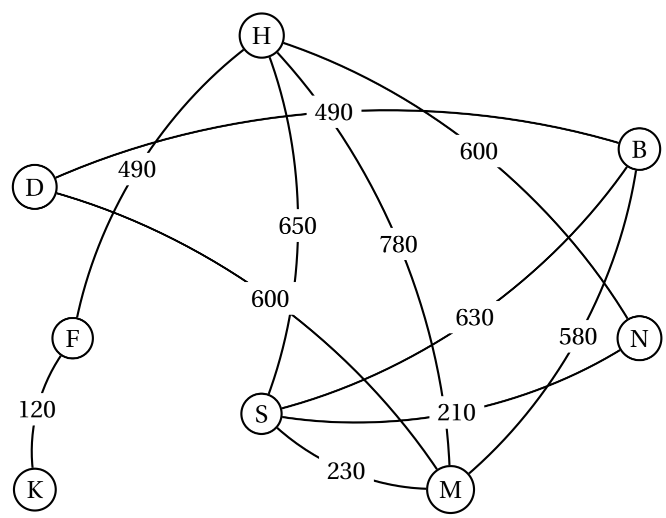
5. On a une épreuve de Bernoulli de paramètres $n = 4$ et de probabilité (échec) égale à 0,25.

La probabilité qu'il y ait 0 échec est égale à $0,75^4$ donc la probabilité cherchée de l'évènement contraire est égale à $1 - 0,75^4$. Fausse.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1.

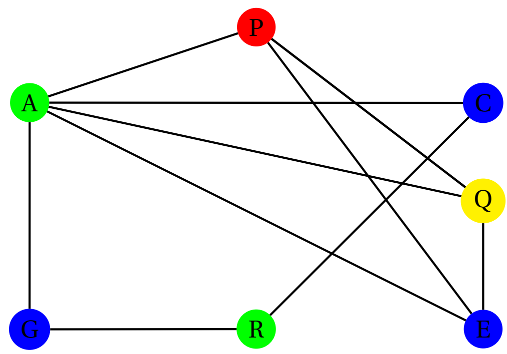


On utilise l'algorithme de Dijkstra.

K	F	H	S	M	N	D	B	sommet choisi
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	K
	120 (K)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	F
		610 (F)	∞	∞	∞	∞	∞	H
			1260 (H)	1390 (H)	1210 (H)	∞	∞	N
			260 (H)	1390 (H)		∞	∞	S
				1390 (H)		∞	1890 (S)	M
						1990 (M)	1890 (S)	B
						1990 (M)		D

Le chemin le plus court obtenu en remontant est K–F–H–S–B, la distance parcourue étant de 1 890 km.

2. *Ce même graphe figure sur la feuille annexe qui peut être rendue avec la copie.*



a. Le sommet de plus haut degré 5 est A : le nombre chromatique γ est donc tel que $\gamma \leqslant 6$.
Mais le sous graphe $\{A ; E ; P ; Q\}$ est complet d'ordre, donc $\gamma \geqslant 4$.
Conclusion : $4 \leqslant \gamma \leqslant 6$.

b. On utilise l'algorithme glouton :

— On attribue une première couleur au sommet de plus haut degré A ;
— On attribue cette couleur au sommet non adjacent à A, donc au seul sommet R ;
— On attribue une deuxième couleur au sommet de degré inférieur soit par exemple à E ;
— On attribue la couleur de E aux sommets non adjacents à E soit C et G ;
— On attribue une troisième couleur au sommet P ;
— On attribue une quatrième couleur au dernier sommet Q.
Finalement seules 4 couleurs sont nécessaires : $\gamma = 4$ (voir ci-dessus).

EXERCICE 3 **7 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

1.

$$2X^2 - 15X + 18 = 0.$$

$\Delta = (-15)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 225 - 144 = 81 = 9^2$: l'équation a deux solutions :
$X_1 = \dfrac{15+9}{2 \times 2} = 6$ et $X_2 = \dfrac{15-9}{2 \times 2} = \dfrac{3}{2}$.

2. En déduire

a. En posant $X = \mathrm{e}^x$, on obtient l'équation précédente ; on a donc deux possibilités :
$\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{e}^x & = & 6 \\ \mathrm{e}^x & = & \frac{3}{2} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} x & = & \ln 6 \\ x & = & \ln\left(\frac{3}{2}\right) \end{array}\right.$
$S\left\{\ln 6 ; \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$.

b. On sait que :
$2X^2 - 15X + 18 = 2(X-6)\left(X - \frac{3}{2}\right) = 2\left(\mathrm{e}^x - 6\right)\left(\mathrm{e}^x - \frac{3}{2}\right)$.
- le premier facteur est positif si et seulement si $\mathrm{e}^x - 6 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 6 \iff x > \ln 6$;
- le second facteur est positif si et seulement si $\mathrm{e}^x - \frac{3}{2} > 0 \iff \mathrm{e}^x > \frac{3}{2} \iff x > \ln \frac{3}{2}$.

On peut donc dresser un tableau de signes :

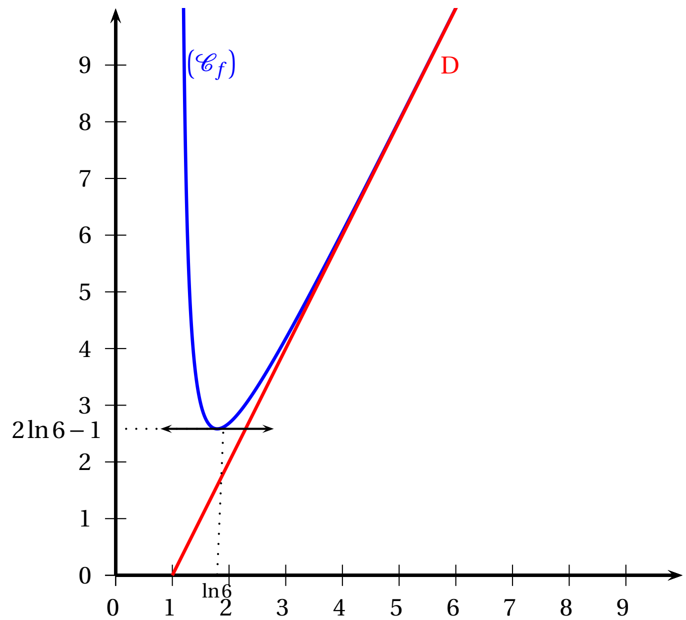
x	$-\infty$	$\ln\frac{3}{2}$		$\ln 6$	$+\infty$
$\mathrm{e}^x-\frac{3}{2}$	$-$	0	$+$		$+$
e^x-6	$-$		$-$	0	$+$
$\left(\mathrm{e}^x-\frac{3}{2}\right)\left(\mathrm{e}^x-6\right)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Partie B

pour tout nombre réel x de l'intervalle $]\ln 3\ ;\ +\infty[$, $f(x)=2x-2+\dfrac{3}{\mathrm{e}^x-3}$.

1. $\left(\mathscr{C}_f\right)$? On a $\displaystyle\lim_{x\to\ln 3}\mathrm{e}^x=3$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to\ln 3}\mathrm{e}^x-3=0$, puis $\displaystyle\lim_{x\to\ln 3}\frac{3}{\mathrm{e}^x-3}=+\infty$, donc par somme de limites $\displaystyle\lim_{x\to\ln 3}f(x)=+\infty$.
   Géométriquement ce résultat montre que la droite verticale d'équation $x=3$ est asymptote à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$.
2. On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x-3=+\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\mathrm{e}^x-3}=0$ ou encore
   $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)-(2x-2)=0$.
   Ce résultat signifie géométriquement que la droite oblique (D) d'équation
   $y=2x-2$ est asymptote à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ au voisinage de plus l'infini.
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\mathrm{e}^x-3}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2x-2)=+\infty$.
3. Soit $d(x)=f(x)-(2x-2)=\dfrac{3}{\mathrm{e}^x-3}$.
   Ce quotient est du signe de e^x-3, mais comme $x>\ln 3\iff\mathrm{e}^x>3\iff\mathrm{e}-3>0$, on a donc $d(x)>0$ quel que soit $x>\ln 3$.
   Géométriquement ce résultat montre que la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est au dessus de (D).
4. Sur l'intervalle $]\ln 3\ ;\ +\infty[$, $f'(x)=2-\dfrac{3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-3)^2}=\dfrac{2(\mathrm{e}^x-3)^2-3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-3)^2}=$
   $\dfrac{2\left(\mathrm{e}^{2x}+9-6\mathrm{e}^x\right)-3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-3)^2}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}-12\mathrm{e}^x+18-3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-3)^2}=\dfrac{2\mathrm{e}^{2x}-15\mathrm{e}^x+18}{(\mathrm{e}^x-3)^2}$.
   Le dénominateur étant positif,le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur qui a été vu dans la partie A. On a donc :
   - sur $]\ln 3\ ;\ \ln 6[$, $f'(x)<0$, la fonction est décroissante;
   - sur $]\ln 6\ ;\ +\infty[$, $f'(x)>0$, la fonction est croissante.
   - $f'(\ln 6)<0$, la tangente à $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est horizontale. $f(\ln 6)$ est le minimum de f sur $\ln 3\ ;\ +\infty[$.

   Ce minimum est égal à : $f(\ln 6)=2\ln 6-2+\dfrac{3}{\mathrm{e}^{\ln 6}-3}=2\ln 6-2+\dfrac{3}{3}=2\ln 6-2+1=2\ln 6-1$.
5.



6. **a.** On a $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{3}{\mathrm{e}^x - 3} = 2x - 3 + 1 + \dfrac{3}{\mathrm{e}^x - 3} = 2x - 3 + \dfrac{\mathrm{e}^x - 3 + 3}{\mathrm{e}^x - 3} = 2x - 3 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 3}$.

b. En posant $u(x) = \mathrm{e}^x - 3$, on voit que $g(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = [\ln(u(x))]'$.

Une primitive sur $]\ln 3\,;\,+\infty[$ de la fonction g est donc la fonction $x \longmapsto \ln\left(\mathrm{e}^x - 3\right)$.

c. Une primitive de la fonction f sur $]\ln 3\,;\,+\infty[$ est la fonction F définie par : $F(x) = x^2 - 3x + \ln\left(\mathrm{e}^x - 3\right)$.

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

Soit x le coefficient multiplicateur associé à une hausse de t %. Comme $5 < t < 20$, alors $x \in]1,05\,;\,1,2[$.

– Le 1er juillet, il dispose de $300x$.

– Le 1er août, il dispose de $(300x - 120)x$.

– Le 1er septembre, il dispose de $[(300x - 120)x - 120]x$.

– Le 1er octobre, il dispose de $[(300x - 120)x - 120]x - 120$.

Il ne reste plus de crédit le 1er octobre, donc :

$[(300x - 120)x - 120]x - 120 = 0 \iff \left[\left(300x^2 - 120x\right) - 120\right]x - 120 = 0$

$\iff 300x^3 - 120x^2 - 120x - 120 = 0 \iff 10x^3 - 4x^2 - 4x - 4 = 0 \iff 5x^3 - 2x^2 - 2x - 2 = 0$

Sur la calculatrice on définit la fonction $f(x) = 5x^3 - 2x^2 - 2x - 2$ et on établit les tableaux de valeurs pour $x \in]1,05\,;\,1,2[$, on se rapproche de zéro et on obtient successivement :

$1,0 < x < 1,1$;

$1,09 < x < 1,10$;

$1,097 < x < 1,098$;

$1,0970 < x < 1,0971$;

$1,09701 < x < 1,09702$.

Au centième près $x \approx 1,0970$

La valeur approchée au centième de t est de 9,70 %.