

## Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud novembre 2004

### EXERCICE 1

7 points

#### Partie A

1. a. Pour tout  $x$ ,  $f(x) = \frac{x}{e^x} = \frac{1}{\frac{e^x}{x}}$ . Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ .

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

b. La fonction  $f$  produit de deux fonctions dérivables est dérivable. Pour tout  $x$ ,  $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ .

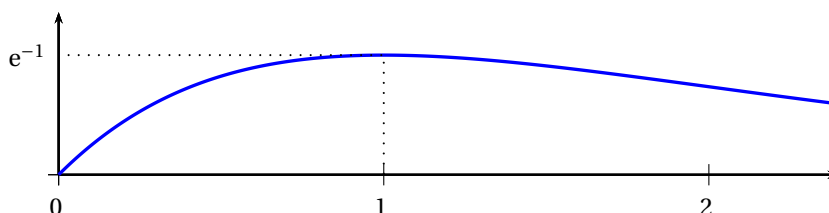
Comme pour tout  $x$ ,  $e^{-x} > 0$ , le signe de  $f'(x)$  est celui de  $1-x$ . Soit sur  $[0, +\infty[$  :  $f'(x) \geq 0$  sur  $[0, 1]$ ;  $f'(x) \leq 0$  sur  $[1, +\infty[$ .

Donc  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0, 1]$ , décroissante sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ .

D'où le tableau de variations de  $f$  :

$x$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	1	+	0	-	
$f(x)$	0	↗ $\frac{1}{e}$		↘ 0	

c. Représentation graphique de  $f$  (échelle  $\frac{1}{2}$ ) :



2. a. La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur l'intervalle  $]0, 1[$ ;  $f(0) = 0$  et  $f(1) = \frac{1}{e}$ ; donc pour  $m \in ]0, \frac{1}{e}[$  l'équation  $f(x) = m$  admet une seule solution sur l'intervalle  $]0, 1[$ .

La fonction  $f$  est continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ ;  $f(1) = \frac{1}{e}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ ; donc pour  $m \in ]0, \frac{1}{e}[$  l'équation  $f(x) = m$  admet une seule solution sur  $]1, +\infty[$ .

En résumé, pour tout  $m$  de  $]0, \frac{1}{e}[$ , l'équation  $f(x) = m$  admet deux solutions. Résultat attendu graphiquement : les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de la courbe  $\Gamma$  et de la droite d'équation  $y = m$ . Or si  $m \in ]0, \frac{1}{e}[$ , cette droite coupe bien la courbe en deux points distincts.

b. Pour  $m = \frac{1}{4}$ , la solution  $\alpha$  est celle qui appartient à l'intervalle  $]0, 1[$ . On trouve facilement que  $\alpha \approx 0,357$  soit  $\alpha \in ]0,35, 0,36[$ .

c. De façon immédiate, pour  $m = 0$  l'équation  $f(x) = 0$  admet pour unique solution  $x = 0$ , et pour  $m = \frac{1}{e}$  cette équation admet pour unique solution  $x = 1$ .

**Partie B**

1. a. Par hypothèse  $u_0 > 0$ .  
 $p$  étant un entier naturel quelconque, si  $u_p > 0$  alors  $u_{p+1}$ , produit de  $u_p$  par le réel strictement positif  $e^{-p}$ , est strictement positif.  
 En conclusion pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .
- b. Comme pour tout entier  $n$ ,  $u_n > 0$ , comparons  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1.  
 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n}$ ,  $-u_n < 0$  donc  $e^{-u_n} < 1$ , soit  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$  : la suite  $(u_n)$  est donc décroissante.
- c. Il résulte des questions précédentes que la suite  $(u_n)$ , décroissante et minorée (par 0), est convergente. Soit  $\ell$  sa limite.  
 $\ell$  est donc solution de l'équation  $\ell = \ell e^{-\ell}$ , soit  $\ell(1 - e^{-\ell}) = 0$ . Les deux facteurs s'annulant pour la seule valeur 0, on en déduit que  $\ell = 0$ .  
 En résumé  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
2. a.  $w_n - w_{n+1} = \ln u_n - \ln u_{n+1} = \ln \frac{u_n}{u_{n+1}} = -\ln e^{-u_n} = \ln e^{u_n} = u_n$ .
- b. Il résulte de a. que  $S_n = w_0 - w_1 + w_1 - w_2 + \dots + w_{n-1} - w_n + w_n - w_{n+1}$ .  
 Soit après simplification de proche en proche,  $S_n = w_0 - w_{n+1}$ .
- c. Sachant, d'après B.1.c., que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$ , et par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ .
3. Par définition  $u_1 = u_0 e^{-u_0}$  donc  $u_1 \in \left] 0, \frac{1}{e} \right[$ .  
 Or d'après A.2.a., on sait qu'il existe une deuxième valeur,  $\beta$ , telle que  $\beta e^{-\beta} = u_1$ . On a donc  $v_0 = \beta$  puis  $v_1 = u_1$  et, plus généralement, pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = v_n$ .

**Exercice 2**

1. La solution générale de l'équation  $y' + y = 0$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto ke^{-x}$ , où  $k$  est une constante réelle arbitraire.  
 L'image de 0 est e donc  $ke^0 = e$  soit  $k = e$ .  
 La fonction  $f$  cherchée est donc celle définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e \times e^{-x}$ . Soit  $f(x) = e^{1-x}$ .
2.  $e^{1-x} = t \iff 1 - x = \ln t$ . La solution de cette équation est donc le réel  $1 - \ln t$ .
3. Soit  $u$  et  $v$  les fonctions définies sur  $[1, e]$  respectivement par  $u(t) = (1 - \ln t)^2$  et  $v(t) = t$ . Ces deux fonctions sont dérivables et leurs dérivées  $u'$  et  $v'$ , définies respectivement par  $u'(t) = -\frac{2}{t}(1 - \ln t)$  et  $v'(t) = 1$ , continues sur l'intervalle  $[1; e]$ . Le théorème d'intégration par parties s'applique donc et :  

$$V = \pi \left( \left[ t(1 - \ln t)^2 \right]_1^e + 2 \int_1^e (1 - \ln t) dt \right)$$
 Calculons à nouveau par parties  $\int_1^e (1 - \ln t) dt$ .  
 Posons  $u(t) = 1 - \ln t$  et  $v(t) = t$ . Ces deux fonctions sont dérivables sur  $[1; e]$ , de dérivées respectives  $u'$  et  $v'$ , continues sur  $[1; e]$ , définies par  $u'(t) = -\frac{1}{t}$  et  $v'(t) = 1$ .  
 D'où :  $\int_1^e (1 - \ln t) dt = \left[ t(1 - \ln t) \right]_1^e + \int_1^e dt = -1 + e - 1 = e - 2$ .  
 En reportant dans l'expression de  $V$ , on obtient :  
 $V = \pi(-1 + 2(e - 2)) = \pi(2e - 5)$ .

**Exercice 3**

1. L'urne contient 6 boules et on en tire 2 : le nombre de cas possibles est donc  $C_6^2$ .

• Pour réaliser l'évènement  $A_0$  il faut tirer 2 boules rouges parmi 4 : le nombre de cas favorables est donc  $C_4^2$ .

On en déduit que  $p(A_0) = \frac{C_4^2}{C_6^2}$ . Soit  $p(A_0) = \frac{2}{5}$ .

• Pour réaliser l'évènement  $A_1$  il faut tirer 1 boule rouge parmi 4 et une boule noire parmi 2 : le nombre de cas favorables est donc  $4 \times 2$ .

On en déduit que  $p(A_1) = \frac{4 \times 2}{C_6^2}$ . Soit  $p(A_1) = \frac{8}{15}$ .

• Pour réaliser l'évènement  $A_2$  il faut tirer 2 boules noires parmi 2 : le nombre de cas favorables est donc 1.

On en déduit que  $p(A_2) = \frac{1}{C_6^2}$ . Soit  $p(A_2) = \frac{1}{15}$ .

2. a. Il reste 4 boules dans l'urne et on en tire 2 : le nombre de cas possibles est donc  $C_4^2$ .

•  $A_0$  étant réalisé, il reste dans l'urne 2 boules rouges et 2 boules noires. Pour réaliser  $B_0$  il suffit de tirer 2 boules rouges : il y a donc un cas favorable.

La probabilité  $p_{A_0}(B_0) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$ .

•  $A_1$  étant réalisé, il reste dans l'urne 3 boules rouges et 1 boule noire. Pour réaliser  $B_0$  il suffit de tirer 2 boules rouges : il y a donc  $C_3^2$  cas favorables.

La probabilité  $p_{A_1}(B_0) = \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{2}$ .

•  $A_2$  étant réalisé, il reste dans l'urne 4 boules rouges. L'évènement  $B_0$  est donc certain. Donc  $p_{A_2}(B_0) = 1$ .

- b. L'évènement  $B_0$  est la réunion des évènements incompatibles  $A_0 \cap B_0$ ,  $A_1 \cap B_0$  et  $A_2 \cap B_0$ . Par suite  $p(B_0)$  est la somme des probabilités de ces trois évènements.

$$\text{Or } p(A_0 \cap B_0) = p_{A_0}(B_0) \times p(A_0) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{15}.$$

$$p(A_1 \cap B_0) = p_{A_1}(B_0) \times p(A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{15}.$$

$$p(A_2 \cap B_0) = p_{A_2}(B_0) \times p(A_2) = \frac{1}{15}.$$

$$\text{D'où } p(B_0) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

- c. Des calculs analogues à ceux menés en a. et b. ci-dessus conduisent à calculer :

$$p_{A_0}(B_1) = \frac{2 \times 2}{C_4^2} = \frac{2}{3}. \text{ D'où } p(A_0 \cap B_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

$$p_{A_1}(B_1) = \frac{1 \times 3}{C_4^2} = \frac{1}{2}. \text{ D'où } p(A_1 \cap B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{15}.$$

Extraire une boule noire au deuxième tirage quand les deux boules noires ont été extraites lors du premier tirage est impossible. Donc  $p_{A_2}(B_1) = 0$ .

$$\text{D'où la valeur de } p(B_1), \text{ somme des trois probabilités précédentes : } p(B_1) = \frac{8}{15}. p_{A_0}(B_2) = \frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}. \text{ D'où } p(A_0 \cap B_2) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{15}.$$

Comme ci-dessus :  $p_{A_1}(B_2) = 0$  et  $p_{A_2}(B_2) = 0$ .

$$\text{D'où la valeur de } p(B_2), \text{ somme des trois probabilités précédentes : } p(B_2) = \frac{1}{15}.$$

d. On cherche à calculer  $p_{B_1}(A_1)$ . Or d'après les calculs antérieurs

$$p(A_1 \cap B_1) = \frac{4}{15} \text{ et } p(B_1) = \frac{8}{15}. \text{ Donc } p_{B_1}(A_1) = \frac{1}{2}.$$

3. L'évènement R est réalisé lorsque l'un des évènements incompatibles ci-dessous l'est :

« tirer une boule noire au premier tirage et une boule noire au second » soit réaliser l'évènement  $A_1 \cap B_1$  ;

ou

« ne tirer aucune boule noire au premier tirage et deux boules noires au second » soit réaliser l'évènement  $A_0 \cap B_2$ .

$$\text{Il en résulte que } p(R) = p(A_1 \cap B_1) + p(A_0 \cap B_2) = \frac{4}{15} + \frac{1}{15} = \frac{1}{3}.$$

#### Exercice 4

##### Partie A

1. Les vecteurs  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  et  $\overrightarrow{OC}$  ont respectivement pour coordonnées (5 ; 5), (1 ; 3) et (8 ; -4).

Les vecteurs  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{PB}$  et  $\overrightarrow{PC}$  ont respectivement pour coordonnées (-5 ; 5), (-9 ; 3) et (-2 ; -4).

Par suite  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PA} = 0$  donc  $A \in \Gamma$  ;  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$  donc  $B \in \Gamma$  ;  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$  donc  $C \in \Gamma$ .

2. Montrons que  $D \in (BC)$  en établissant que les vecteurs  $\overrightarrow{DB}$  et  $\overrightarrow{BC}$  sont colinéaires.

$\overrightarrow{DB}$  a pour coordonnées (-1, 1),  $\overrightarrow{BC}$  a pour coordonnées (7, -7), donc

$$\overrightarrow{BC} = (-7)\overrightarrow{DB}.$$

Montrons que  $(OD) \perp (BC)$  en établissant que  $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

$\overrightarrow{OD}$  a pour coordonnées (2 ; 2),  $\overrightarrow{BC}$  a pour coordonnées (7 ; -7), donc

$$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0.$$

En résumé, D est bien le projeté de O sur la droite (BC).

##### Partie B

1.  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg \frac{z'}{z} = \arg \frac{20}{z\bar{z}}$ . Or  $z\bar{z}$  est un réel (strictement positif) donc de même  $\frac{20}{z\bar{z}}$ . Par suite  $\arg \frac{z'}{z} = 0 + k.2\pi$  : les points O, M, M' sont alignés.

2. a.  $M \in \Delta$  donc son affixe  $z$  est du type  $2 + iy$ , où  $y$  désigne un réel quelconque. On en déduit que  $\bar{z} = 2 - iy$  donc  $z + \bar{z} = 4$ .

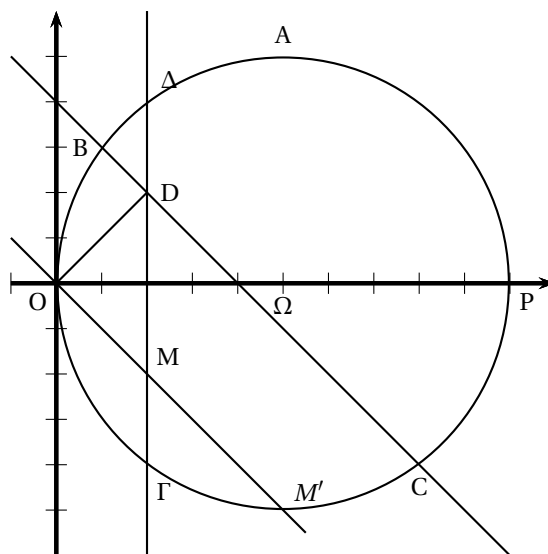
b.  $z' + \bar{z}' = \frac{20}{\bar{z}} + \frac{20}{z} = \frac{20(z + \bar{z})}{z\bar{z}} = \frac{80}{z\bar{z}}$ . Par suite  $5(z' + \bar{z}') = \frac{400}{z\bar{z}} = \frac{20}{\bar{z}} \times \frac{20}{z} = z' \times \bar{z}'$ .

c. Démontrons que  $M' \in \Gamma$  en établissant que  $\Omega M'^2 = 25$ .

$$\overrightarrow{\Omega M'} \text{ a pour affixe } z' - 5, \text{ donc } \Omega M'^2 = (z' - 5)\overline{(z' - 5)}.$$

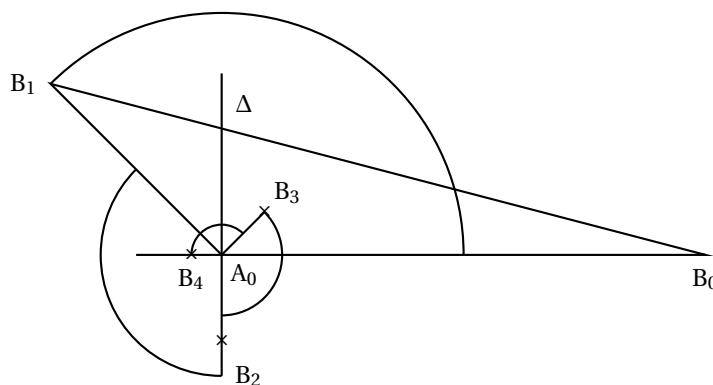
Or  $(z' - 5)\overline{(z' - 5)} = (z' - 5)(\bar{z}' - 5) = z'\bar{z}' - 5(z' + \bar{z}') + 25$ . D'après la relation établie en b. il en résulte que  $(z' - 5)\overline{(z' - 5)} = 25$  c'est-à-dire que  $\Omega M'^2 = 25$  :  $M' \in \Gamma$ .

On sait de plus, d'après la question 1., que  $M' \in (OM)$ . Donc  $M'$  est bien le point d'intersection (autre que O) de la droite (OM) et du cercle  $\Gamma$ .



**Exercice 4**  
**Exercice de spécialité**

1.  $A_0$  et  $B_0$  ont été choisis de façon quelconque avec  $A_0B_0 = 8$ .  
On peut vérifier que  $A_0B_i = \frac{1}{2}A_0B_{i-1}$  et que une mesure de  $(\overrightarrow{A_0B_{i-1}}, \overrightarrow{A_0B_i})$  est  $\frac{3\pi}{4}$  avec  $1 \leq i \leq 4$ .



2. On sait que l'image d'un triangle par une similitude plane est un triangle semblable. Ici  $A_0 = S(A_0)$ ,  $B_{n+1} = S(B_n)$  et  $B_{n+2} = S(B_{n+1})$ . Donc le triangle  $A_0B_{n+1}B_{n+2}$  est l'image par la similitude  $S$  du triangle  $A_0B_nB_{n+1}$  : ces triangles sont semblables.
3. a.  $\ell_{n+1} = B_{n+1}B_{n+2} = S(B_n)S(B_{n+1})$ . Par suite  $\ell_{n+1} = \frac{1}{2}\ell_n$  : la suite  $(\ell_n)$  est donc une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .
- b. On sait que  $\ell_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ell_0$ .
- c. On sait que  $\sum_n = \ell_0 \frac{-(\frac{1}{2})^{n+1} + 1}{\frac{1}{2}}$ . Donc  $\sum_n = 2\ell_0 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ .
- Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_n = 2\ell_0$ .

4. a. Comme 3 et 4 sont premiers entre eux, il existe des couples d'entiers relatifs  $(u; v)$  tels que  $3u - 4v = 2$ ;  $(2; 1)$  constitue une solution particulière. On en déduit que les solutions de  $3x - 4y = 2$  sont celles de  $3x - 4y = 3 \times 2 - 4 \times 1$ , soit encore celles de  $3(x - 2) = 4(y - 1)$ .
- Le théorème de Gauss s'applique : 4 divise  $3(x - 2)$ , 4 est premier avec 3 donc 4 divise  $x - 2$  c'est à dire qu'il existe un entier  $t$  tel que  $x - 2 = 4t$  soit  $x = 2 + 4t$ .
- On en déduit facilement que  $y - 1 = 3t$  soit  $y = 1 + 3t$ .
- En résumé les solutions de  $3x - 4y = 2$  sont les couples d'entiers relatifs de la forme  $(2 + 4t, 1 + 3t)$ , avec  $t \in \mathbb{Z}$ .
- b. Comme par définition de la suite de points  $(B_n)$ , on a  $B_n = S^n(B_0)$ , on en déduit que une mesure de  $(\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0B_n})$  est  $n \times \frac{3\pi}{4}$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Pour que le point  $B_n$  appartienne à  $\Delta$  il est nécessaire et suffisant que  $n \times \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , où  $(n, k) \in \mathbb{Z}^2$ .
- On en déduit que  $(n, k)$  est solution de  $3n = 2 + 4k$  soit de  $3n - 4k = 2$ .
- Il résulte du a. que  $n$  est du type  $2 + 4t$ , avec  $t \in \mathbb{Z}$ .
- Les entiers naturels  $n$**  pour lesquels  $B_n \in \Delta$  sont donc du type  $2 + 4t$  avec  $t \in \mathbb{N}$ .