

✨ **Corrigé du baccalauréat S Amérique du Sud** ✨
13 novembre 2012

Exercice 1**6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A**1. Restitution organisée de connaissance**

- a. Somme de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$, φ est dérivable sur cet intervalle et

$$\varphi'(x) = e^x - x > 0 \text{ d'après le troisième résultat admis.}$$

φ est donc une fonction croissante sur $[0; +\infty[$ et comme $\varphi(0) = e^0 - 0 = 1$ qui est donc le minimum de φ sur $[0; +\infty[$, on a donc $\varphi(x) \geq 1$ pour tout x de $[0; +\infty[$.

- b. Le résultat précédent s'écrit donc pour tout x de $[0; +\infty[$:

$$\varphi(x) \geq 1 \iff e^x - \frac{x^2}{2} \geq 1 \iff e^x \geq 1 + \frac{x^2}{2}. \text{ Comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x^2}{2} = +\infty, \text{ par comparaison (quatrième résultat admis), } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

2. a. *Méthode 1* : $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x}{e^{\frac{1}{2}x}}$.

$$\text{Posons } u(x) = \frac{1}{2}x, \text{ alors } f(x) = \frac{u}{e^u} = \frac{1}{\frac{e^u}{u}}.$$

Si x tend vers plus l'infini, u tend vers plus l'infini. On a démontré au 1. que $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ et par

$$\text{conséquent } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^u}{u}} = 0, \text{ soit } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\textit{Méthode 2} : f(x) = -\left(-\frac{1}{2}x\right) e^{-\frac{1}{2}x}.$$

$$\text{Posons } u(x) = -\frac{1}{2}x; \text{ on a donc } f(x) = -ue^u.$$

Si x tend vers $+\infty$, u tend $-\infty$. On sait que $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- b. f produit de fonctions dérivables sur $[0; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x e^{-\frac{1}{2}x} \right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} \left(1 - \frac{1}{2}x \right).$$

Comme $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$, quel que soit le réel x , le signe de $f'(x)$ est celui de la différence $1 - \frac{1}{2}x$.

$$1 - \frac{1}{2}x > 0 \iff 1 > \frac{1}{2}x \iff 2 > x.$$

$$\text{De même } 1 - \frac{1}{2}x < 0 \iff 1 < \frac{1}{2}x \iff 2 < x.$$

Donc f est croissante sur $[0; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$.

On a $f(0) = 0$ et $f(2) = \frac{1}{2} \times 2e^{-\frac{1}{2} \times 2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{e}$		
	0	↗ ↘	0

Partie B

1. a. u est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $u'(t) = ae^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}ate^{-\frac{1}{2}t}$.

$$\text{Donc } u'(t) + \frac{1}{2}u(t) = ae^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}ate^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}ate^{-\frac{1}{2}t} = ae^{-\frac{1}{2}t}$$

$$u \text{ est solution de } (E) \text{ si } ae^{-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \iff a = \frac{1}{2}.$$

La fonction $t \mapsto u(t) = \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$ est solution de (E) .

- b. On vient de voir que $u(t) = \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$ est solution de (E) soit :

$$\star \quad u'(t) + \frac{1}{2}u(t) = \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}.$$

v est solution de $(E) \iff v'(t) + \frac{1}{2}v(t) = \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t} \iff$ par différence avec l'égalité \star

$$v'(t) + \frac{1}{2}v(t) - \left(u'(t) + \frac{1}{2}u(t)\right) = \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t} \iff$$

$$v'(t) - u'(t) + \frac{1}{2}v(t) - \frac{1}{2}u(t) = 0 \iff (v-u)'(t) + \frac{1}{2}(v-u)(t) = 0$$

c'est-à-dire si et seulement si la fonction $h = v - u$ est solution de l'équation (E') .

- c. Soit y une solution de l'équation, donc $y' + \frac{1}{2}y = 0 \quad \star \star$.

Posons $z(t) = e^{\frac{1}{2}t}y$. z est dérivable et

$$z'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}y + e^{\frac{1}{2}t}y' = e^{\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{2}y + y'\right) = e^{\frac{1}{2}t} \times 0 \text{ (d'après } \star \star) = 0.$$

La fonction z de dérivée nulle est donc une constante $K \in \mathbb{R}$.

$$z(t) = e^{\frac{1}{2}t}y = K \iff y = Ke^{-\frac{1}{2}t}, K \in \mathbb{R}.$$

- d. On a vu au b. que les solutions v de l'équation (E) sont telles que $v - u = v - \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t}$ sont solutions de (E') . Donc d'après la question précédente :

$$v - \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t} = Ke^{-\frac{1}{2}t} \iff v = \left(K' + \frac{1}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Les solutions de (E) sont les fonctions $t \mapsto \left(K + \frac{1}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}$, $K' \in \mathbb{R}$.

2. La solution $y(t) = \left(K + \frac{1}{2}t\right)e^{-\frac{1}{2}t}$ vérifie :

$$y(0) = 0 \iff Ke^{-\frac{1}{2} \times 0} = 0 \iff K = 0.$$

La solution est donc définie par $t \mapsto \frac{1}{2}te^{-\frac{1}{2}t} = f(t)$.

3. a. On a vu que sur $[2; +\infty[$, f est décroissante. L'algorithme fait calculer successivement $f(3)$, $f(4)$, ... : ces valeurs décroissent vers zéro, donc l'algorithme va s'arrêter dès qu'une image $f(n)$ sera inférieure à 0,1. Cette valeur de n sera celle donnée à la sortie de l'algorithme.
- b. La calculatrice donne $f(7) \approx 0,107$, $f(8) \approx 0,073$: $n_0 = 8$.
- c. La réponse précédente peut se traduire par : à partir $8 + 8 = 16$ h il restera dans le corps moins de 0,1 g de principe actif soit moins de 10 %.

Exercice 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. M d'affixe z est invariant si et seulement si $M' = M \iff z' = z \iff \frac{2iz}{z-i} = z \iff z(z-i) = 2iz \iff z(z-i-2i) = 0 \iff z(z-3i) = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z = 3i$.
- Les points invariants par f sont O et le point d'affixe $3i$.

$$2. \text{ On a } z_{B'} = \frac{2iz_B}{z_B - i} = \frac{2i \times 2i}{2i - i} = \frac{-4}{i} = 4i.$$

$$z_{C'} = \frac{2iz_C}{z_C - i} = \frac{2i \times 1}{1 - i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i(1+i)}{2} = i(1+i) = -1 + i.$$

3. a. Pour tout point M distinct de A , l'affixe z' de M' est telle que :

$$z' = \frac{2iz}{z-i} \Rightarrow z' - 2i = \frac{2iz}{z-i} - 2i$$

$$z' - 2i = \frac{2iz}{z-i} - \frac{2i(z-i)}{z-i} = \frac{2iz - 2iz - 2}{z-i} = \frac{-2}{z-i}.$$

b. On a $|z' - 2i| = BM'$ et

$$\left| \frac{-2}{z-i} \right| = \frac{|-2|}{|z-i|} = \frac{2}{AM}.$$

L'égalité précédente : $z' - 2i = \frac{-2}{z-i}$ se traduit en termes de modules par : $BM' = \frac{2}{AM}$.

Si M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1, alors $AM = 1$, donc $BM' = \frac{2}{1} = 2$.

Conclusion : si M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1, alors M' appartient au cercle Γ' de centre B et de rayon 2.

c. Pour les arguments : $z' - 2i = \frac{-2}{z-i} \rightarrow \arg(z' - 2i) = \arg\left(\frac{-2}{z-i}\right) \Leftrightarrow$

$$\arg(z' - 2i) = \arg(-2) - \arg(z-i) \Leftrightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{BM'}) = \pi - (\vec{u}, \overrightarrow{AM}).$$

d. On calcule $AD^2 = |z_D - z_A|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

$AD^2 = 1 \Rightarrow AD = 1$, donc D appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1. D'après les résultats de la question précédente, D appartenant à Γ , son image D' appartient à Γ' cercle de centre B et de rayon 2.

D'autre part le résultat de la question 3. c. montre qu'il suffit de construire sur le cercle de centre B et de rayon 1 un arc de même longueur que l'arc du cercle de centre A et de rayon 1 intercepté par l'angle égal à l'argument de $(\vec{u}, \overrightarrow{AD})$. (voir figure à la fin)

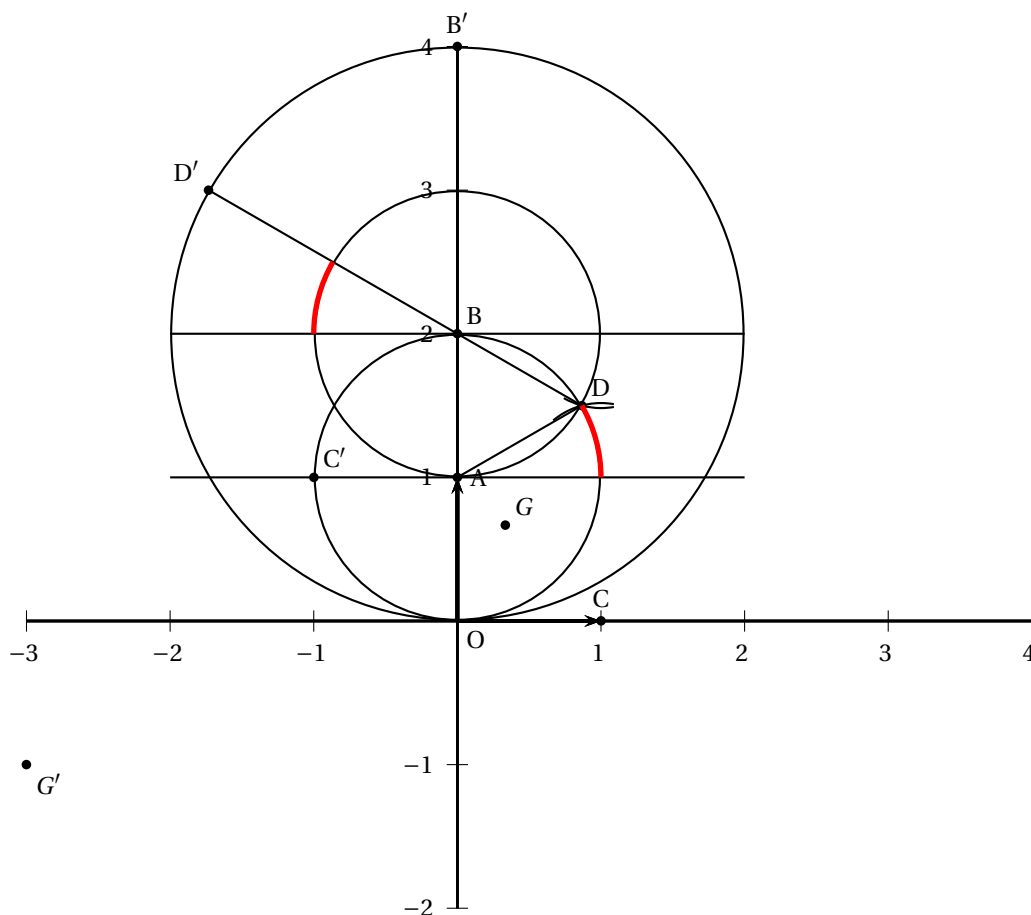
4. a. Par définition $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

$$\text{On a donc } z_G = \frac{1}{3}(z_B + z_C) = \frac{1}{3}(2i + 1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i.$$

b. On calcule l'affixe de $\overrightarrow{G'O} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}$ c'est-à-dire $z_{\overrightarrow{G'O}} + z_{\overrightarrow{G'B'}} + z_{\overrightarrow{G'C'}} = 3 + i + 3 + 5i + 0 + 2i = 6 + 8i \neq 0$.

Conclusion : G' n'est pas l'isobarycentre de O , B' et C' . Ce qui est évident sur la figure.

On peut également dire que O , B' et C' appartiennent au disque de centre B et de rayon 2 : leur isobarycentre (centre de gravité) appartient lui aussi à ce disque ce qui n'est pas le cas de G' .



Exercice 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. On a par définition de la similitude de rapport k :

$$BC = kAB \text{ soit } 1 = kL;$$

$CE = k BC$ soit $L - 1 = k \times 1$ soit en reportant dans l'équation précédente :

$$1 = L(L-1) \Leftrightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(L - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(L - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(L - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(L - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$0 \Leftrightarrow L - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = 0 \text{ ou } L - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0 \Leftrightarrow L = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ou } L = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Seule la solution positive est valable : $L = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or).

2. a. La droite (AB) a pour image la droite (BC). L'angle de la similitude est donc égale à

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = +\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{On a vu que } 1 = kL, \text{ donc } k = \frac{1}{L} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{1 - 5} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{-4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

b. Ω est par définition invariant par f , donc aussi par $f \circ f$. $f \circ f(\Omega) = \Omega$;

Par f , A a pour image B et B a pour image C, donc $f \circ f(A) = C$;

Par f , B a pour image C et C a pour image E, donc $f \circ f(B) = E$;

- c. La composée des deux similitudes de centre Ω est une similitude de centre Ω , dont le rapport est le produit des rapports soit k^2 et l'angle la somme des angles soit π .
- d. A et C sont alignés avec Ω : Ω appartient à la droite (AC) ;
B et E sont alignés avec Ω : Ω appartient à la droite (BE), donc Ω est le point commun aux droites (AC) et (BE).
3. a. L'image par f de la droite (AB) est la droite (BC) et l'image du point C est le point E.
Comme (CD) est parallèle à (AB) son image par f est la parallèle à (BC) contenant E, donc la droite (EF).
- b. On sait que $(\vec{\Omega E}, \vec{\Omega E'}) = \frac{\pi}{2}$.
Or on a vu que la droite (BE) est l'image de la droite (AC) par f , donc (AC) \perp (BE).
D'après la question précédente le point E' appartient à la droite (EF) et aussi à (AC).
Conclusion : le point E' est le point commun aux droites (EF) et (AC).

Partie B

1. Dans le repère choisi on a $A(0; 0)$, $B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 0\right)$ et $C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 1\right)$

L'écriture complexe de la similitude directe est $z' = az + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. En utilisant les images de A et de B par f : on a

$$\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_C = az_B + b \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = a \times 0 + b \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} + i = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + b \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = b \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} + i = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = b \\ i = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ a = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}i}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

$$a = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}i = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4}i = \frac{\sqrt{5}-1}{2}i.$$

L'écriture complexe de f est donc :

$$z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2}iz + \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

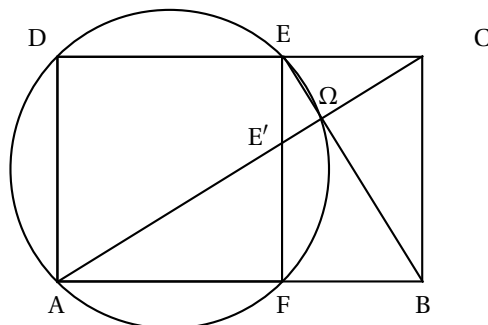
2. On a $z_D = i$. En utilisant le résultat précédent et si D' est l'image de D par f :

$$z_{D'} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}iz_D + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}i \times i + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 = z_F.$$

On peut également dire que D appartient à (CD), donc son image appartient à l'image de (CD) qui est la droite (EF)

D appartient à (AD), donc son image appartient à l'image par f de (AD) ; or A est invariant, donc l'image de (AD) est la perpendiculaire à (AD) contenant A, soit (AB).

Conclusion : D' appartient à (EF) et à (AD) : c'est leur point commun E.

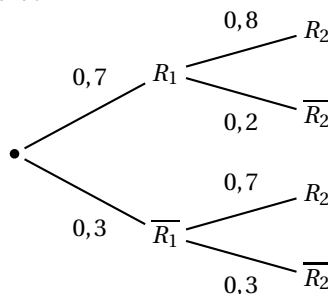


Exercice 3

4 points

Commun à tous les candidats

1. a. On a l'arbre de probabilités suivant :

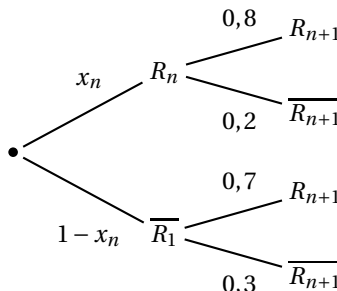


On a $p(X = 2) = 0,7 \times 0,8 = 0,56$;
 $p(X = 1) = 0,7 \times 0,2 + 0,3 \times 0,7 = 0,14 + 0,21 = 0,35$;
 $p(X = 0) = 0,3 \times 0,3 = 0,09$

b. $E(X) = 2 \times 0,56 + 1 \times 0,35 + 0 \times 0,09 = 1,12 + 0,35 = 1,47 \approx 1,5$.

2. a. D'après l'énoncé $P_{R_n}(R_{n+1}) = 0,8$ et $P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) = 0,7$.

b. On construit un arbre analogue :



On a donc $x_{n+1} = x_n \times 0,8 + (1 - x_n) \times 0,7 = 0,8x_n - 0,7x_n + 0,7 = 0,7 + 0,1x_n$.

3. a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $u_{n+1} = 9x_{n+1} - 7 = 9(0,7 + 0,1x_n) - 7 = 6,3 + 0,9x_n - 7 = 0,9x_n - 0,7 = 0,1(9x_n - 7) = 0,1u_n$.

$u_{n+1} = 0,1u_n$ quel que soit le naturel n non nul signifie que la suite (u_n) est géométrique de raison $0,1$, de premier terme $u_1 = 9x_1 - 7 = 9 \times 0,7 - 7 = -0,7$.

b. On sait que pour tout naturel n , $u_n = u_1 \times r^{n-1} = -0,7 \times 0,1^{n-1}$.

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Par suite, comme $x_n = \frac{u_n + 7}{9}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{7}{9} \approx 0,777778$.

Sur un très grand nombre de services le pourcentage de services réussis se rapproche de 77,8 %.

Exercice 4

5 points

Commun à tous les candidats

1. Intersection avec $(O; \vec{i})$: avec $y = z = 0$, on obtient $A(\frac{1}{2}; 0; 0)$.

Intersection avec $(O; \vec{j})$: avec $x = z = 0$, on obtient $B(0; -1; 0)$.

Intersection avec $(O; \vec{k})$: avec $x = y = 0$, on obtient $A(0; 0; \frac{1}{3})$.

On a $AB^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$;

$AC^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}$;

$BC^2 = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$;

Donc tous les côtés ont des longueurs différentes : affirmation fausse.

2. $M(x; y; z) \in \delta_1 \cap \mathcal{P} \iff 2(1+t) - (5-4t) + 3(2-2t) - 1 = 0 \iff 2+2t-5+4t+6-6t-1 = 0 \iff 2=0$
 égalité fautive : affirmation fautive

3. δ_1 a un vecteur directeur $\vec{\delta}_1(1; -4; -2)$;

δ_2 a un vecteur directeur $\vec{\delta}_2(-1; +4; 2)$.

Ces deux vecteurs sont colinéaires ($\vec{\delta}_2 = -\vec{\delta}_1$), donc les droites sont parallèles : affirmation vraie.

4. \mathcal{P} a un vecteur normal $\vec{n}(2; -1; 3)$.

La perpendiculaire à \mathcal{P} contenant S a pour vecteur directeur \vec{n} .

Une équation paramétrique de cette perpendiculaire est donc :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-t \\ z = 5+3t \end{cases}$$

Cette perpendiculaire coupe le plan \mathcal{P} en un point éventuel dont les coordonnées vérifient l'équation de \mathcal{P} c'est-à-dire si :

$$2(1+2t) - (3-t) + 3(5+3t) - 1 = 0 \iff 2+4t-3+t+15+9t-1 = 0 \iff 14t+13 = 0 \iff t = -\frac{13}{14}$$

En reportant cette valeur dans l'équation paramétrique, on obtient les coordonnées du projeté orthogonal de S sur \mathcal{P} :

$$\begin{cases} x = 1+2 \times \left(-\frac{13}{14}\right) \\ y = 3 - \left(-\frac{13}{14}\right) \\ z = 5+3 \times \left(-\frac{13}{14}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{12}{14} \\ y = \frac{55}{14} \\ z = \frac{31}{14} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{6}{7} \\ y = \frac{55}{14} \\ z = \frac{31}{14} \end{cases}$$

Affirmation vraie.

5. On calcule la distance du point S au plan \mathcal{P} :

$$d(S; \mathcal{P}) = \frac{|2x_S - y_S + 3z_S - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{|2-3+15-1|}{\sqrt{14}} = \frac{13}{\sqrt{14}} \approx 3,4 > 3.$$

La distance du point S au plan \mathcal{P} est supérieure au rayon de la sphère : cela signifie que la sphère et le plan n'ont pas de point commun : affirmation fautive.