

∞ Corrigé du baccalauréat ES/L Antilles–Guyane 19 juin 2014 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

1. Réponse a. : $-1 + 2^{31}$

Il faut reconnaître la somme des 31 premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 20.

2. Réponse b. : trois solutions distinctes

$-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x = 0 \iff -\frac{1}{3}x(x^2 - 3x^2 - 9) = 0$; $x = 0$ est une solution et le discriminant du trinôme $x^2 - 3x^2 - 9$ est strictement positif ce qui donne deux solutions distinctes et différentes de 0.

3. Réponse c. : $F(x) = x \ln x - x$.

Il suffit de dériver cette fonction F .

4. Réponse b. : $n \geq 9$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,003 \iff \ln(0,5^n) < \ln 0,003 \iff n \ln 0,5 < \ln 0,003 \iff n > \frac{\ln 0,003}{\ln 0,5} \text{ et } \frac{\ln 0,003}{\ln 0,5} \approx 8,38$$

EXERCICE 2

5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Partie A

1. a. En utilisant cette modélisation, l'opérateur décide d'arrondir les résultats à 10^{-3} .

Ce choix d'arrondi correspond à obtenir les résultats au millier d'abonnés près.

- b. Le nombre de millions d'abonnés en 2014 est $u_1 = 0,92u_0 + 3 = 0,92 \times 20 + 3 = 21,4$.

Le nombre de millions d'abonnés en 2015 est $u_2 = 0,92u_1 + 3 = 0,92 \times 21,4 + 3 = 22,688$.

On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 37,5$ pour tout n de \mathbb{N} ; donc $u_n = v_n + 37,5$.

2. $v_{n+1} = u_{n+1} - 37,5 = 0,92u_n + 3 - 37,5 = 0,92(v_n + 37,5) - 34,5 = 0,92v_n + 34,5 - 34,5 = 0,92v_n$
 $v_0 = u_0 - 37,5 = 20 - 37,5 = -17,5$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $v_0 = -17,5$.

3. On déduit que, pour tout n de \mathbb{N} , $v_n = v_0 \times q^n = -17,5 \times 0,92^n$.

Comme, pour tout n de \mathbb{N} , $u_n = v_n + 37,5$, on peut dire que $u_n = -17,5 \times 0,92^n + 37,5$.

4. 2020 = 2013 + 7 donc le nombre de millions d'abonnés en 2020 est u_7 :

$$u_7 = -17,5 \times 0,92^7 + 37,5 \approx 27,738.$$

5. $0 \leq 0,92 < 1$ donc la suite géométrique (v_n) de raison 0,92 a pour limite 0.

Comme $u_n = v_n + 37,5$, la suite (u_n) a pour limite 37,5.

6. Comme la limite de la suite (u_n) est de 37,5, cela veut dire que u_n se rapprochera de la valeur 37,5 donc dépassera à un moment donné la valeur 30.

À la calculatrice, on trouve $u_{10} \approx 29,898$ et $u_{11} \approx 30,506$.

Partie B

1. On complète l'algorithme pour déterminer le nombre d'années nécessaires à partir de 2013 pour que l'opérateur fasse des bénéfices :

Variabes :	N un nombre entier naturel non nul U un nombre réel
Traitement :	Affecter à U la valeur 20 Affecter à N la valeur 0 Tant que $U \leq 25$ affecter à U la valeur $0,92 \times U + 3$ affecter à N la valeur $N + 1$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

2. L'opérateur fera des bénéfices dès que n vérifiera $u_n > 25$; on résout cette inéquation :

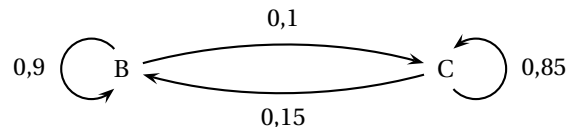
$$\begin{aligned}
 u_n > 25 &\Leftrightarrow -17,5 \times 0,92^n + 37,5 > 25 \\
 &\Leftrightarrow 12,5 > 17,5 \times 0,92^n \\
 &\Leftrightarrow \frac{12,5}{17,5} > 0,92^n \\
 &\Leftrightarrow \ln \frac{12,5}{17,5} > \ln(0,92^n) && \text{(croissance de la fonction } \ln) \\
 &\Leftrightarrow \ln \frac{12,5}{17,5} > n \times \ln 0,92 && \text{(propriété de la fonction } \ln) \\
 &\Leftrightarrow \frac{\ln \frac{12,5}{17,5}}{\ln 0,92} < n && \text{(car } \ln 0,92 < 0)
 \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln \frac{12,5}{17,5}}{\ln 0,92} \approx 4,04$ donc l'opérateur fera des bénéfices la première fois pour $n = 5$ soit en 2018.

À la calculatrice, on trouve $u_4 \approx 24,963$ et $u_5 \approx 25,966$.

EXERCICE 2**5 points****Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. a. On représente la situation à l'aide d'un graphe pondéré :



- b. En 2013, donc pour $n = 0$, on a constaté qu'il y avait 20% de consommateurs ayant le profil bio donc $a_0 = 0,2$; $b_0 = 1 - a_0 = 0,8$.

$$P_0 = (b_0 \quad c_0) = (0,2 \quad 0,8)$$

La matrice de transition M est la matrice 2×2 telle que $P_n \times M = P_{n+1}$.

$$\text{D'après le texte, on peut dire que : } \begin{cases} b_{n+1} = 0,9b_n + 0,15c_n \\ c_{n+1} = 0,1b_n + 0,85c_n \end{cases}$$

$$\text{Donc la matrice de transition est : } M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

c. On donne la matrice $M^2 = \begin{pmatrix} 0,825 & 0,175 \\ 0,2625 & 0,7375 \end{pmatrix}$

La probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio » est donnée par b_2 ; on va donc calculer $P_2 = (b_2 \quad c_2)$

Pour tout n de \mathbb{N} , $P_n \times M = P_{n+1}$ donc $P_1 \times M = P_2$ et $P_0 \times M = P_1$, donc $P_0 \times M \times M = P_2$ et donc

$$P_2 = P_0 \times M^2 = (0,2 \quad 0,8) \times \begin{pmatrix} 0,825 & 0,175 \\ 0,2625 & 0,7375 \end{pmatrix}$$

$$= (0,2 \times 0,825 + 0,8 \times 0,2625 \quad 0,2 \times 0,175 + 0,8 \times 0,7375) = (0,375 \quad 0,625)$$

Donc la probabilité que le client choisi en 2015 soit un « consommateur bio » est de 0,375.

d. L'état stable du graphe probabiliste est l'état $(b \quad c)$ tel que $\begin{cases} (b \quad c) \times M = (b \quad c) \\ b + c = 1 \end{cases}$

$$(b \quad c) \times M = (b \quad c) \iff \begin{cases} 0,9b + 0,15c = b \\ 0,1b + 0,85c = c \end{cases} \iff 0,1b - 0,15c = 0 \iff b = 1,5c$$

$$\begin{cases} b = 1,5c \\ b + c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1,5c \\ 2,5c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0,6 \\ c = 0,4 \end{cases} \quad \text{L'état stable est } (0,6 \quad 0,4).$$

2. a. L'algorithme suivant donne le nombre minimal d'années pour que l'affirmation du directeur soit vérifiée :

Variabes :	N un nombre entier naturel non nul B un nombre réel
Traitement :	Affecter à N la valeur 0 Affecter à B la valeur 0,2 Affecter à C la valeur 0,8 Tant que $B \leq 0,5$ affecter à B la valeur $0,9 \times B + 0,15 \times C$ affecter à C la valeur $1 - B$ affecter à N la valeur $N + 1$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

- b. À la calculatrice, on trouve :

$$P_3 = P_2 \times M = (0,375 \quad 0,625) \times M \approx (0,431 \quad 0,569)$$

$$P_4 = P_3 \times M \approx (0,473 \quad 0,527)$$

$$P_5 = P_4 \times M \approx (0,505 \quad 0,495)$$

L'affirmation du directeur est vraie au bout de 5 années, donc en 2018.

EXERCICE 3

5 points

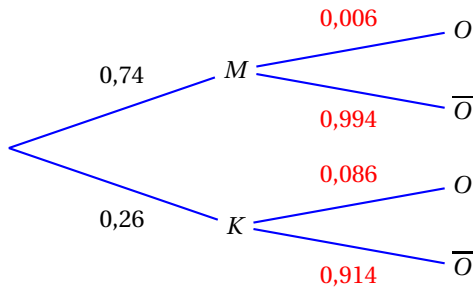
Commun à tous les candidats

Partie A

1. D'après le texte, on sait que :

- 0,6% des médecins pratiquent l'ostéopathie ce qui veut dire que $P_M(O) = 0,006$ et donc que $P_M(\bar{O}) = 1 - 0,006 = 0,994$;
- 8,6% des kinésithérapeutes pratiquent l'ostéopathie ce qui veut dire que $P_K(O) = 0,086$ et donc que $P_K(\bar{O}) = 1 - 0,086 = 0,914$.

D'où l'arbre :



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(O) = P(M \cap O) + P(K \cap O) = 0,74 \times 0,006 + 0,26 \times 0,086 = 0,0268$$

3. Un patient vient de suivre une séance d'ostéopathie chez un praticien d'une des deux catégories.

La probabilité que le praticien soit un kinésithérapeute est $P_O(K)$:

$$P_O(K) = \frac{P(K \cap O)}{P(O)} = \frac{0,26 \times 0,086}{0,0268} \approx 0,083.$$

Partie B

1. La probabilité $P(20 \leq T \leq 40)$ correspond à $P(\mu - \sigma \leq T \leq \mu + \sigma)$ où μ représente l'espérance et σ l'écart type ; d'après le cours, $P(\mu - \sigma \leq T \leq \mu + \sigma)$ a pour valeur arrondie au centième 0,68.

2. La probabilité qu'une visite dure plus de trois quart d'heure est $P(T \geq 45)$.

À la calculatrice, on trouve $P(T \geq 45) \approx 0,07$.

Partie C

1. a. Les conditions d'utilisation de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont : $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

$$n = 47000 \geq 30; p = 0,006 \text{ donc } np = 47000 \times 0,006 = 282 \geq 5 \text{ et } n(1-p) = 47000 \times 0,994 = 46718 \geq 5.$$

Donc les trois conditions sont réalisées.

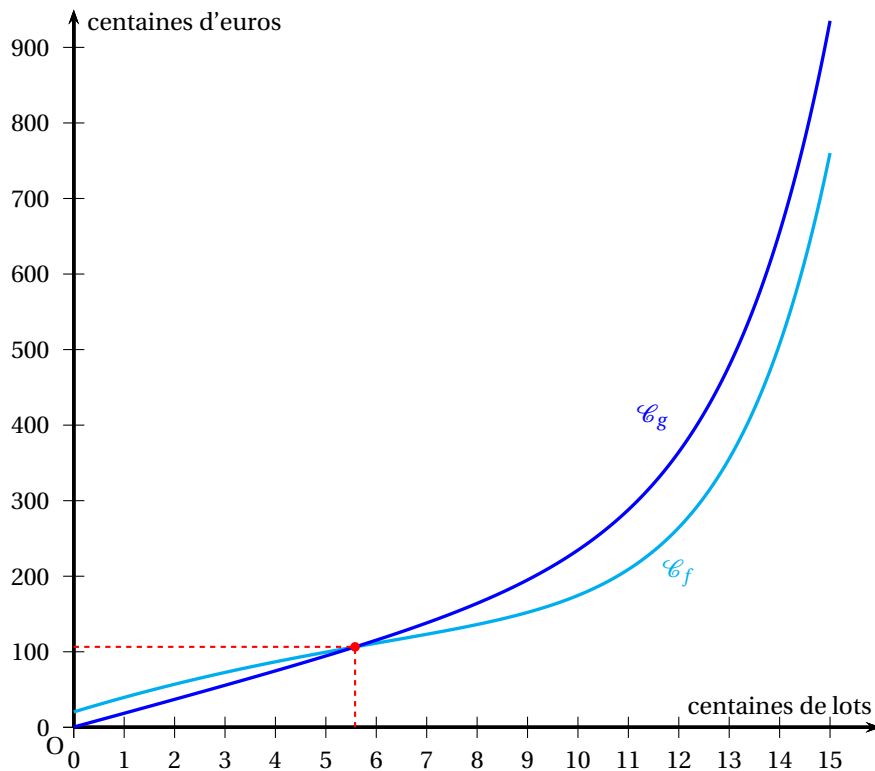
b. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % est :

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \left[0,006 - 1,96 \frac{\sqrt{0,006 \times 0,994}}{\sqrt{47000}}; 0,006 + 1,96 \frac{\sqrt{0,006 \times 0,994}}{\sqrt{47000}} \right] \approx [0,0053; 0,0067] \end{aligned}$$

La région compte 47000 médecins dont 164 ostéopathes, ce qui fait une fréquence de

$$f = \frac{164}{47000} \approx 0,003.$$

La fréquence f n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation trouvé et elle est plus petite que la borne inférieure de cet intervalle ; on peut donc dire que cette région est défavorisée par rapport à la situation de la France métropolitaine.

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

Soit g la fonction définie sur $[0; 15]$ par $g(x) = 18x + e^{0,5x-1}$.

1. $g'(x) = 18 + 0,5e^{0,5x-1}$
2. Sur \mathbb{R} , $e^{0,5x-1} > 0$ donc $g'(x) > 0$ sur $[0; 15]$;
la fonction g est donc strictement croissante sur $[0; 15]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0; 15]$ par $f(x) = e^{0,5x-1} - x^2 + 20x + 20$.

1. La nouvelle machine permet d'obtenir un coût inférieur à l'ancien quand la courbe \mathcal{C}_f sera en-dessous de la courbe \mathcal{C}_g ; voir figure page 5.
Le nombre k de lots à partir duquel la nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production est compris entre 500 et 600.
2. a. Le coût avec la nouvelle machine est inférieur au coût avec l'ancienne quand $f(x) \leq g(x)$;

$$f(x) \leq g(x) \iff e^{0,5x-1} - x^2 + 20x + 20 \leq 18x + e^{0,5x-1}$$

$$\iff -x^2 + 20x + 20 \leq 18x$$

$$\iff -x^2 + 2x + 20 \leq 0$$
- b. On résout dans $[0; 15]$ l'inéquation $-x^2 + 2x + 20 \leq 0$:

$\Delta = 84 > 0$ donc l'équation $-x^2 + 2x + 20 = 0$ admet deux solutions distinctes

$$\frac{-2 + \sqrt{84}}{-2} = 1 - \sqrt{21} < 0 \text{ et } 1 + \sqrt{21} \in [0; 15].$$

Le trinôme $-x^2 + 2x + 20$ est du signe de $a = -1$ donc négatif à l'extérieur des racines.

Donc $-x^2 + 2x + 20 \leq 0$ si $x \in [1 + \sqrt{21}; 15]$.

c. Le nombre x représente le nombre de centaines de lots; $1 + \sqrt{21} \approx 5,583$.

Donc la nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production à partir de 559 lots.

3. Le coût marginal est le surcout de fabrication d'un lot supplémentaire; il est donné par la fonction dérivée f' .

La valeur moyenne du coût marginal lorsqu'on fabrique entre 5 centaines et 8 centaines de lots est

$$\frac{1}{8-5} \int_5^8 f'(x) \, dx = \frac{1}{3} [f(x)]_5^8 = \frac{f(8) - f(5)}{3} \approx 12,20.$$

La valeur moyenne, arrondie à l'euro, du coût marginal d'un lot quand on en fabrique entre 5 et 8 centaines, est de 12 €.