∽ Corrigé du baccalauréat ES Antilles-Guyane ∾ septembre 2006

EXERCICE 1 **4 points**

1. $\ln\left(x^2\right) = 2 \iff x^2 = e^2 \iff x = \text{e ou } x = -\text{e}$.
2. $\exp(2x-6) = \text{e}^{2x-6} = \text{e}^{2(x-3)} = \left(\text{e}^{x-3}\right)^2$.
3. On sait que quel que soit x, $\text{e}^x > 0$; il faut donc résoudre l'inéquation $\text{e}^x < 9 \iff x < \ln 9 \iff x < \ln 3^2 \iff x < 2\ln 3$. $S =]-\infty\ ;\ 2\ln 3[$.
4. $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\text{d}x = \int_0^2 f(x)\,\text{d}x + \int_2^5 f(x)\,\text{d}x \iff \int_2^5 f(x)\,\text{d}x = \int_0^5 f(x)\,\text{d}x - \int_0^2 f(x)\,\text{d}x = 1,9-(-0,9) = 2,8$.
5. $V_m = \dfrac{1}{4-0}\displaystyle\int_0^4 \dfrac{1}{x+1}\,\text{d}x = \dfrac{1}{4}\left[\ln(x+1)\right]_0^4 = \dfrac{\ln 5 - \ln 1}{4} = \dfrac{\ln 5}{4}$.
6. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\text{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2}{\text{e}^x}\right) = -\infty$.
7. On a $\left(3\ln q(2+\ln q)\right)' = \dfrac{3}{q}(2+\ln q) + 3\ln q \times \dfrac{1}{q} = \dfrac{6+3\ln q+3\ln q}{q} = \dfrac{6+6\ln q}{q}$.
8. On a $f'(x) = \dfrac{2}{x} - 3$.
   Une équation de la tangente au point A d'abscisse 1 et d'ordonnée $2\ln 1 - 3\times 1 + 5 = 2$ est $y - f(1) = f'(1)(x-1) = 0$, soit $y - 2 = -1(x-1) \iff y = -x+3$.

EXERCICE 2 **6 points**

PARTIE A : UTILISATION D'UN GRAPHIQUE

1. $\text{A}(0\ ;\ 6) \in \mathcal{C}_g \iff 6 = g(0)\dfrac{a}{\text{e}^0+1} \iff 6 = \dfrac{a}{2}$.
   Le nombre dérivé en 0 est le coefficient directeur de la droite (AB) soit $\dfrac{0-6}{4-0} = -\dfrac{3}{2} = g'(0)$.
2. $g'(x) = -\dfrac{ab\text{e}^{bx}}{\left(\text{e}^{bx}+1\right)^2}$.
3. • $g(0) = 6 \iff \dfrac{a}{\text{e}^0+1} = 6 \iff \dfrac{a}{2} = 6 \iff a = 12$.
   • $g'(0) = -\dfrac{3}{2} \iff -\dfrac{12b\text{e}^0}{\left(\text{e}^0+1\right)^2} = -\dfrac{3}{2} \iff b = \dfrac{1}{2}$.
   On a donc $g(x) = \dfrac{12}{\text{e}^{0,5x}+1}$.

PARTIE B : ÉTUDE DE FONCTIONS

1. On donne $f(x) = \text{e}^{0,5x} - 1$ pour tout réel x dans $[0\ ;\ +\infty[$
   a. • $f(0) = \text{e}^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.
   • $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{0,5x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   b. f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = 0,5\text{e}^{0,5x}$.
   $f(x) > 0$ car c'est le produit de deux nombres supérieurs à zéro.
   La fonction f est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$ de $f(0) = 0$ à plus l'infini.

c. Voir ci-dessous.

2. **a.** On a $f(p) = g(p) \iff \mathrm{e}^{0,5p} - 1 = \dfrac{12}{\mathrm{e}^{0,5b}+1} \iff \left(\mathrm{e}^{0,5p}-1\right)\left(\mathrm{e}^{0,5b}+1\right) = 12 \iff \mathrm{e}^{p} - 1 = 12 \iff \mathrm{e}^{p} - \mathrm{e}^{p} = 13 \iff p = \ln 13 \approx 2,565$.

Voir sur le graphique.

b. On a $f(p) = g(p) = \mathrm{e}^{0,5p} - 1 = \mathrm{e}^{0,5\ln 13} - 1 = \left(\mathrm{e}^{\ln 13}\right)^{0,5} - 1 = 13^{0,5} - 1 = \sqrt{13} - 1$.

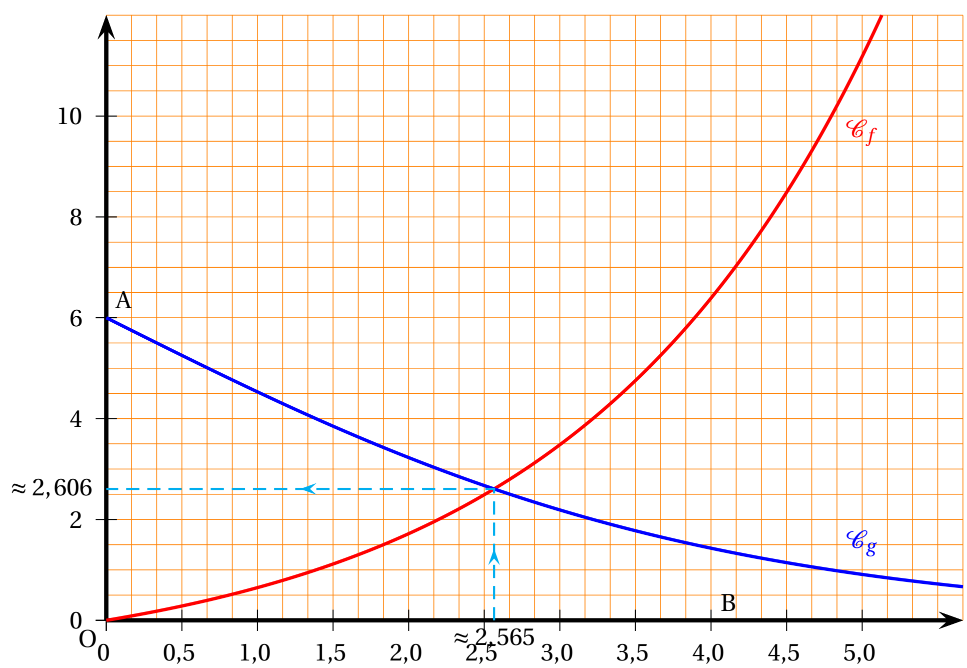
c. On a vu que pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$, donc l'intégrale est égale à l'aire, en unité d'aire de la surface limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et le droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 13$.

Une primitive de f est la fonction F définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$F(x) = \dfrac{1}{0,5}\mathrm{e}^{0,5x} - x$, d'où :

$\displaystyle\int_0^{\ln 13} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{\ln 13} = F(\ln 13) - F(0) = \dfrac{1}{0,5}\mathrm{e}^{0,5x} - x - \left(\dfrac{1}{0,5}\mathrm{e}^{0,5x} - x\right) = \dfrac{1}{0,5}\mathrm{e}^{0,5\times\ln 13} - \ln 13 - \left(\dfrac{1}{0,5}\mathrm{e}^{0} - 0\right) = 2\times 13^{0,5} - \ln 13 - \dfrac{1}{0,5} = 2\sqrt{13} - 2 - \ln 13 \approx 2,646$

Annexe



PARTIE C : INTERPRÉTATION ÉCONOMIQUE

1. Le prix d'équilibre est le nombre p trouvé dans la partie B, puisque $f(p) = g(p)$.

On a donc $p \approx 2,565$ centaines d'euros soit à l'euro près $p \approx 257$ €.

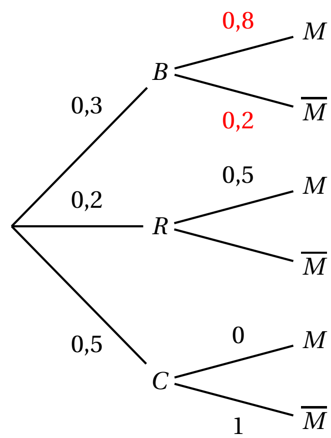
2. On a $\mathrm{R} = np - \displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\sqrt{3} - 1\right) \times \ln 13 - 2\sqrt{13} + 2 + \ln 13$.

$\mathrm{R} = \sqrt{13}\ln 13 - \ln 13 - 2\sqrt{13} + 2 + \ln 13 = (\ln 13 - 2)\sqrt{13} + 2$.

$\mathrm{R} \approx 4,04$ soit environ 4 centaines d'euros à la centaine près.

EXERCICE 3 **5 points**

1. **a.**



b. On a $p(C) = 1 - p(B) - p(R) = 1 - 0,3 - 0,2 = 0,5$.

c. On sait que $p(B \cap M) = 0,24$.
Or $p(B \cap M) = p(B) \times p_B(M)$, donc
$0,24 = 0,3 \times p_B(M) \iff p_B(M) = \dfrac{0,24}{0,3} = 0,8$.

d. On sait que $p_R(M) = 0,5$, donc :
$p(M) = p(B \cap M) + p(R \cap M) = 0,3 \times 0,8 + 0,2 \times 0,5 = 0,24 + 0,1 = 0,34$.

e. Il faut trouver $pM(R) = \dfrac{p(M \cap R)}{p(M)} = \dfrac{0,1}{0,34} \approx 0{,}294\,1$, soit 0,294 au millième près.

2. **a.** X suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,34$. La probabilité que les trois étudiants empruntent un magazine chacun est donc égale à :
$0,34^3 \approx 0,0393$, soit 0,039 au millième près.

b. X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3.

c.

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,287	0,444	0,229	0,039

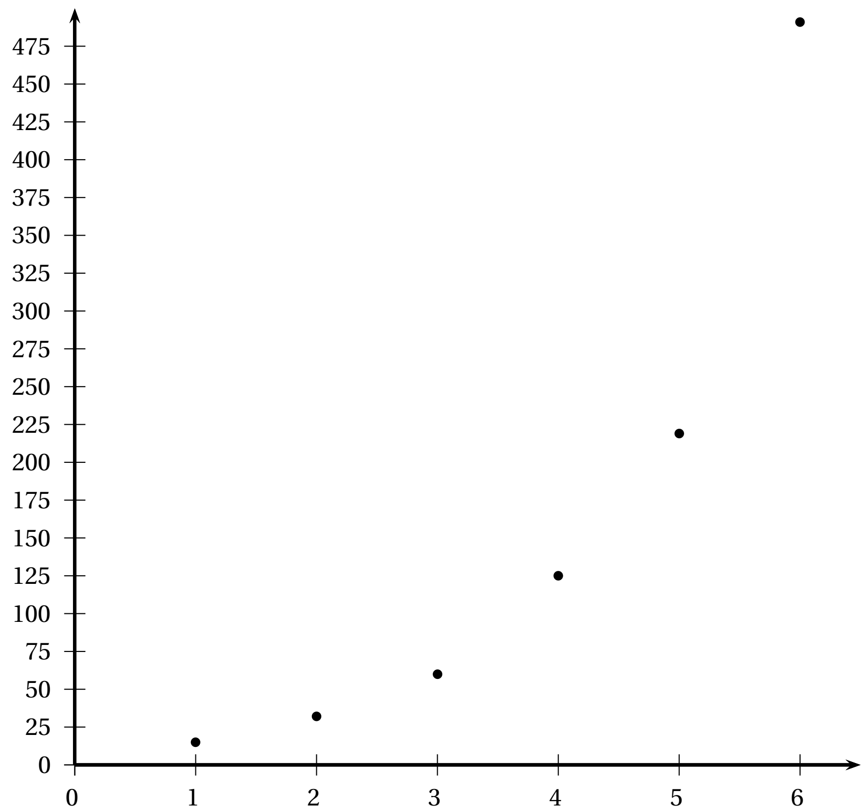
d. On sait que l'espérance de X est :
$E = n \times p = 3 \times 0,34 = 1,02$.
Cela signifie que sur un grand nombre chaque triplet d'étudiants interrogés aura emprunté en moyenne un magazine.

EXERCICE 4 **5 points**

1. Pourcentage d'augmentation de la fréquence de visite de ce site entre les mois 2 et 3 :
$\dfrac{60 - 32}{32} \times 100 = \dfrac{28}{32} \times 100 = 87,5$ (%).

2. Si c est le nombre de visiteurs le cinquième mois,on a :
$157 = \dfrac{15 + 32 + 60 + 125 + c + 491}{6} \iff 6 \times 157 = 723 + c \iff 942 = 723 + c \iff c = 942 - 723 = 219$.

3.



4. **a.** Les points dans l'ensemble ne sont pas alignés. L'ajustement affine n'est pas pertinent.

b.

x_i	1	2	3	4	5	6
z_i	0,405	1,163	1,792	2,526	3,086	3,894

c. La calculatrice donne $z = 0,684x - 0,251$ les coefficients étant arrondis au millième.

d. Pour $y > 0$, on a :

$z = \ln\left(\dfrac{y}{10}\right) \iff \dfrac{y}{10} = \mathrm{e}^{z} \iff y = 10 \times \mathrm{e}^{z} \iff y = 10 \times \mathrm{e}^{0,684x - 0,251} = 10 \times \mathrm{e}^{0,684x} \times \mathrm{e}^{-0,251}$.

Or $\mathrm{e}^{-0,251} \approx 0,7788$.

Finalement : $y \approx 10 \times 0,7788 \times \mathrm{e}^{0,684x} = 7,788 \times \mathrm{e}^{0,684x}$ soit enfin :

$y \approx 7,79 \times \mathrm{e}^{0,68x}$.

e. Avec ce modèle pour $x = 10$, on obtient :

$y \approx 7,79 \times \mathrm{e}^{0,68 \times 10} = 7,79 \times \mathrm{e}^{6,8} \approx 6994,23$, soit environ 6 994 visiteurs.

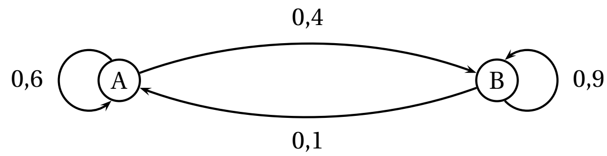
Ce nombre paraît légèrement exagéré...

EXERCICE 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Graphe probabiliste correspondant à cette situation :



La matrice de transition est $M = \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,1 & 0,9\end{pmatrix}$.

2. **a.** En 2005, 25 % de la population est abonnée à l'opérateur A, donc $a_0 = 0,25$ et $b_0 = 0,75$.
$E_0 = \begin{pmatrix}0,25 & 0,75\end{pmatrix}$.

b. On sait que $E_1 = E_0 \times M = \begin{pmatrix}0,25 & 0,75\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,1 & 0,9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,225 & 0,775\end{pmatrix}$.

c. On a $E_8 = E_0 \times M^8 = \begin{pmatrix}0,25 & 0,75\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,1 & 0,9\end{pmatrix}^8$. En arrondissant les coefficients au centième, la calculatrice ddonne : $E_8 = \begin{pmatrix}0,2 & 0,8\end{pmatrix}$.

d. On doit avoir $E = E \times M$ ou $\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,1 & 0,9\end{pmatrix}$, ce qui donne le système :

$$\left\{\begin{array}{lcr} a & = & 0,6a+0,1b\\ b & = & 0,4a+0,9b\\ a+b & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} 0,4a-0,1b & = & 0\\ -0,4a+0,1b & = & 0\\ a+b & = & 1\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{lcr} 4a-b & = & 0\\ a+b & = & 1\end{array}\right. \Rightarrow \text{(par somme) } 5a = 1 \iff a = \frac{1}{5} = 0,2. \text{ D'où } b = 0,8.$$

L'état stable du système est $E = \begin{pmatrix}0,2 & 0,8\end{pmatrix}$.

Au bout d'un certain nombre d'années 20 % de la population sera abonné chez l'opérateur A.

Partie B

1. Pour tout naturel n,

$E_{n+1} = E_n \times M$ soit $\begin{pmatrix}a_{n+1} & b_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\\0,1 & 0,9\end{pmatrix} \iff$

$$\left\{\begin{array}{lcr} a_{n+1} & = & 0,6a_n+0,1b_n\\ b_{n+1} & = & 0,4a_n+0,9b_n\\ a_n+b_n & = & 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} a_{n+1} & = & 0,6a_n+0,1(1-a_n)\\ b_{n+1} & = & 0,4(1-b_n)+0,9b_n\\ a_n+b_n & = & 1\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcr} a_{n+1} & = & 0,5a_n+0,1\\ bn+1 & = & 0,5b_n+0,4\\ a_n+b_n & = & 1\end{array}\right.$$

2. **a.** Avec $u_n = a_n - 0,2$, on peut écrire :
$u_{n+1} = a_{n+1} - 0,2 \iff u_{n+1} = 0,5a_n + 0,1 - 0,2 \iff$
$u_{n+1} = 0,5a_n - 0,1 \iff u_{n+1} = 0,5(a_n - 0,2)$, soit $u_{n+1} = 0,5u_n$, relation qui montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5 de premier terme $u_0 = a_0 - 0,2 = 0,25 - 0,2 = 0,05$.

b. On sait que $u_n = u_0 \times q^n = 0,05 \times 0,5^n$.

$$u_n = 0,05 \times 0,5^n.$$

c. On sait que $0 < 0,5 < 1$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
Or $u_n = a_n - 0,2 \iff a_n = u_n + 0,2$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,2$.