

❧ **Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane** ❧
juin 2007

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Question de cours

La fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ est continue sur I (car f et g le sont), donc $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ existe. Comme de plus on a $f(x) - g(x) \geq 0$, la propriété de positivité permet d'écrire que : $\int_a^b f(x) - g(x) dx \geq 0$. On a alors, par linéarité de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0$, d'où le résultat.

Partie A

1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1. La fonction $t \mapsto 2 - t$ est continue sur $[1; x]$, et on a :

$$\int_1^x (2 - t) dt = \left[2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_1^x = \left(2x - \frac{1}{2}x^2 \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}.$$

2. Comme $t \in [1; +\infty[$, $t > 0$, donc :

$$2 - t \leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t - t^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq t^2 - 2t + 1 \Leftrightarrow (t - 1)^2.$$

La dernière inégalité étant vraie, le raisonnement par équivalences permet de conclure qu'on a bien $2 - t \leq \frac{1}{t}$.

3. Les fonctions $t \mapsto 2 - t$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ sont continues sur $[1; +\infty[$ et $2 - t \leq \frac{1}{t}$, la question de cours permet alors d'écrire que :

$$\int_1^x (2 - t) dt \leq \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leq [\ln t]_1^x$, d'où : $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leq \ln x$.

Partie B

1. a. h est continue sur \mathbb{R} (polynôme) et :

$$\int_1^4 h(x) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x \right]_1^4 = \left(-\frac{1}{6} \times 64 + 16 - 6 \right) - \left(-\frac{1}{6} + 1 - \frac{3}{2} \right) = -\frac{4}{6} + \frac{4}{6} = 0.$$

b. Sur le graphique, les deux aires coloriées sont égales.

2. Sur $[1; 4]$ on a $h(x) \leq \ln x$ (question A3), l'aire \mathcal{A} du domaine (D) est donc donnée par : $\mathcal{A} = \int_1^4 (\ln x - h(x)) dx = \int_1^4 \ln x dx$ (par linéarité et compte-tenu du fait que $\int_1^4 h(x) dx = 0$). Posons $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln x$ et $u(x) = x$, $v'(x) = \frac{1}{x}$. Les fonctions u , v sont dérivables sur $[1; 4]$, les fonctions u' , v' sont continues sur $[1; 4]$, le théorème d'intégration par parties s'applique donc et on a :

$$\mathcal{A} = [x \ln x]_1^4 - \int_1^4 1 dx = 4 \ln 4 - 1 \times (4 - 1) = 8 \ln 2 - 4 \text{ u.a.}$$

EXERCICE 2

5 points

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' réels.a. Par définition : $z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z})$, c'est-à-dire :

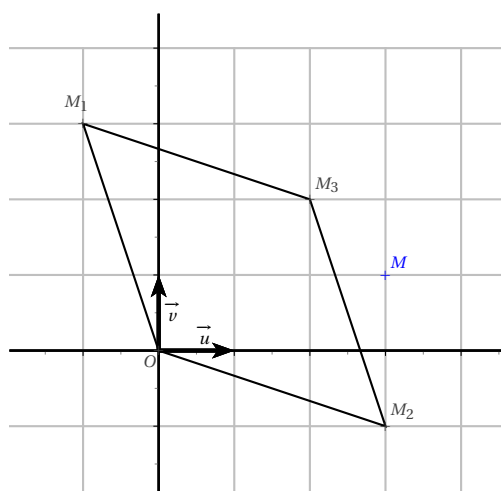
$$x' + iy' = \frac{1}{2}(x + iy + i(x - iy)) = \frac{1}{2}(x + iy + ix + y) = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x + y)i.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les égalités annoncées.

On en déduit que $y' = x'$ donc que M' appartient à la droite d'équation $y = x$. Or O et A appartiennent aussi à cette droite, d'où $M' \in (OA)$.b. $M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x + y) \\ y = \frac{1}{2}(x + y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + y \\ 2y = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \{x = y\}$. L'ensemble cherché est donc la droite (OA) .c. Un calcul immédiat montre que $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(y - x); \frac{1}{2}(x - y)\right)$ et $\overrightarrow{OA}(1; 1)$. Donc $\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(y - x) + \frac{1}{2}(x - y) = 0$, et $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{OA}$.

2. a. Voir figure 1.

FIGURE 1 – exercice 2 (non-spécialité)

b. L'écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est : $z \mapsto e^{i\frac{\pi}{2}}z = iz$. Par conséquent $z_1 = iz$.Par définition du point M_3 , $\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_2}$, donc $z_3 - z_1 = z_2 - 0$, ce qui donne : $z_3 - iz = z_2$, c'est-à-dire $z_3 = iz + z_2$.c. On a : $OM_1 = |z_1 - 0| = |iz| = |i| \times |z| = |z|$;
 $OM_2 = |z_2| = |z|$.Le parallélogramme $OM_1M_3M_2$ a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un losange.d. $z' - z = \frac{1}{2}(z + i\bar{z}) - z = \frac{1}{2}(z + i\bar{z} - 2z) = \frac{1}{2}(i\bar{z} - z)$.Par ailleurs, $\frac{1}{2}iz_3 = \frac{1}{2}i(iz + z_2) = \frac{1}{2}(-z + i\bar{z})$, on a donc bien $z' - z = \frac{1}{2}iz_3$.On en déduit que $|z' - z| = \left|\frac{1}{2}iz_3\right| = \frac{1}{2} \times |i| \times |z_3|$, c'est-à-dire que $MM' = \frac{1}{2}OM$.

3. On a déjà $OM = OM_1 = OM_2 = |z|$, les points M, M_1 et M_2 sont donc sur un même cercle de centre O . M_3 appartient à ce cercle si et seulement si $OM_3 = OM$ c'est-à-dire (d'après la question 2d) si et seulement si $2MM' = OM$, ce qui équivaut bien à $MM' = \frac{1}{2}OM$.

Le triangle OMM' est rectangle en M' ; en effet $M' \in (OA)$ et $(MM') \perp (OA)$ (question 1), on a donc :

$$\sin \widehat{M'OM} = \frac{MM'}{OM} = \frac{\frac{1}{2}OM}{OM} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\widehat{M'OM} = \frac{\pi}{6}$.

EXERCICE 2

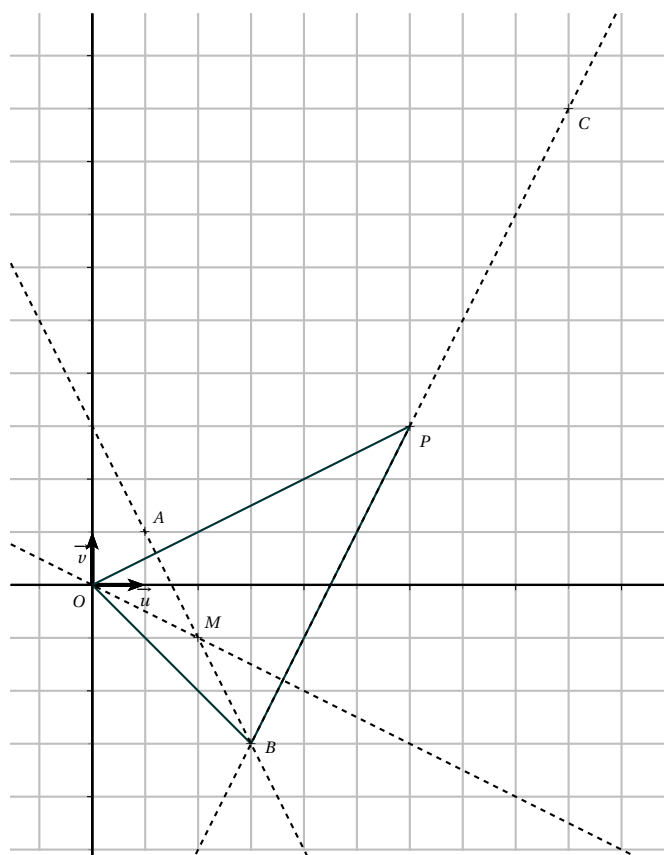
5 points

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Voir figure 2.

FIGURE 2 – exercice 2 (spécialité)



2. s est la composée d'une similitude indirecte (S_1) par une similitude directe (h), c'est donc une similitude indirecte.
3. S_1 a pour écriture complexe $z \mapsto \bar{z}$ et h a pour écriture complexe $z \mapsto 3z$.
 $s = h \circ S_1$ a donc pour écriture complexe $z \mapsto 3\bar{z}$.
4. a. $z_B = 3\bar{z}_A = 3(1 - i) = 3 - 3i$.

b. $-3iz_A = -3i(1+i) = -3i - 3i^2 = 3 - 3i = z_B$, ce qu'il fallait démontrer.

On a alors : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = \arg(-3i) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$.

5. M a pour affixe $z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1+i+3-3i}{2} = 2-i$.

P a pour affixe $z_P = 3\overline{z_M} = 3(2+i) = 6+3i$.

On a $\overrightarrow{OP}(6; 3)$ et $\overrightarrow{AB}(2; -4)$, donc $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 \times 2 + 3 \times (-4) = 12 - 12 = 0$, ce qui prouve bien que $(OP) \perp (AB)$.

Partie B

1. M est le milieu de $[AB]$, et une similitude conserve les milieux, donc $s(M)$ est le milieu de $[s(A)s(B)]$, autrement dit P est le milieu de $[BC]$.

2. a. $s \circ s$ a pour écriture complexe : $z' \mapsto 3\overline{3\overline{z}} = 9z$. On reconnaît l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport 9.

b. $s(O) = O$ (calcul immédiat).

$s(P) = s \circ s(M)$ or $s \circ s$ est une homothétie de centre O , donc les points O, M et $s(P)$ sont alignés.

L'image de la droite (OP) par la similitude s est la droite passant par $s(O)$ et $s(P)$; c'est donc la droite (OM) .

c. On sait que $(BM) \perp (OP)$ d'après la question A5 : M appartient donc à la hauteur issue de B dans le triangle OBP .

Une similitude conserve l'orthogonalité donc $s((BM)) \perp s((OP))$. Or $s(B) = C$ et $s(M) = P$, et on a vu que $s((OP)) = (OM)$, on a donc montré que $(BP) \perp (OM)$. On en déduit que M appartient à la hauteur issue de O dans le triangle OBP .

M est donc l'orthocentre du triangle OBP .

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

1. Les plans (P) et (Q) ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}(0; 2; 1)$ et $\vec{n}'(0; 1; -2)$.
On a $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$, donc $\vec{n} \perp \vec{n}'$ et par suite, les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

2. L'intersection des plans (P) et (Q) est une droite (plans perpendiculaires).

$A \in (P)$ car $2 \times 0 + 6 - 6 = 0$ et $A \in (Q)$ car $0 - 12 + 12 = 0$, donc $A \in (P) \cap (Q)$;

on montre de la même façon que $I \in (P) \cap (Q)$.

Les points A et I étant distincts, la droite d'intersection des plans (P) et (Q) est donc la droite (AI) , c'est-à-dire la droite (D) .

3. Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace. M appartient à l'axe $(O; \vec{j})$ si et seulement

$$\text{si } \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

M appartient à l'axe $(O; \vec{j})$ et au plan (P) si et seulement si
$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ 2y + z - 6 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire si et seulement si
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$
. Le plan (P) coupe donc l'axe $(O; \vec{j})$

au point $B(0; 3; 0)$.

Un raisonnement analogue montre que le plan (Q) coupe l'axe $(O; \vec{j})$ en un point $C(0; -12; 0)$.

4. On a $\overrightarrow{AC}(-3; -12; -6)$ donc le plan (T) a une équation cartésienne de la forme : $-3x - 12y - 6z + d = 0$. Et $B(0; 3; 0) \in (T)$, donc $0 - 12 \times 3 - 0 + d = 0$, d'où $d = 36$.

Le plan (T) a donc pour équation cartésienne $-3x - 12y - 6z + 36 = 0$, ou encore, en simplifiant par -3 : $x + 4y + 2z - 12 = 0$.

5. La droite (OA) passe par $O(0; 0; 0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{OA}(3; 0; 6)$. Une représentation paramétrique de (OA) est donc :
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) .$$

Un point M appartient à la droite (OA) et au plan (T) si et seulement si il existe un réel t tel que $M(3t; 0; 6t)$ et $(3t) + 4 \times 0 + 2 \times (6t) - 12 = 0$, ce qui donne une unique valeur : $t = \frac{4}{5}$. La droite (OA) et le plan (T) sont donc sécants en un point H qui a pour coordonnées $\left(3 \times \frac{4}{5}; 0; 6 \times \frac{4}{5}\right)$, c'est-à-dire $H\left(\frac{12}{5}; 0; \frac{24}{5}\right)$.

6. Les points B et H appartiennent au plan (T) qui a pour vecteur normal \overrightarrow{OA} , donc $(BH) \perp (AC)$: le point H appartient à la hauteur issue de B du triangle ABC .
 $\overrightarrow{AH}\left(-\frac{3}{5}; 0; -\frac{6}{5}\right)$ et $\overrightarrow{BC}(0; -15; 0)$, donc $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $(AH) \perp (BC)$: le point H appartient donc à la hauteur issue de A du triangle ABC .
 Le point H est donc l'orthocentre du triangle ABC .

EXERCICE 4**4 points****Commun à tous les candidats**

Notons :

- $S1$ (respectivement $S2$) l'évènement « la pièce est fabriquée par le sous-traitant $S1$ (resp. $S2$) »;
- $P1$ (respectivement $P2$) l'évènement « la pièce est du type $P1$ (resp. $P2$) ».

D'après les indications de l'énoncé on a déjà :

$$p_{P1}(S1) = 0,8 \quad p_{P1}(S2) = 0,2 \quad p_{P2}(S1) = 0,4 \quad p_{P2}(S2) = 0,6.$$

1. **a.** Il y a autant de pièces de chaque type donc $p(P1) = 0,5$.
- b.** La probabilité que ce soit une pièce $P1$ et qu'elle vienne de $S1$ est : $p(P1 \cap S1) = p_{P1}(S1) \times p(P1) = 0,8 \times 0,5 = 0,4$.
- c.** La probabilité qu'elle vienne de $S1$ est, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(S1) = p(S1 \cap P1) + p(S2 \cap P2) = p_{P1}(S1) \times p(P1) + p_{P2}(S1) \times p(P2) = 0,8 \times 0,5 + 0,4 \times 0,5 = 0,6.$$

2. Il y a 200 pièces au total, soit 100 $P1$ et 100 $P2$. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose tous les tirages équiprobables. Il y a donc $\binom{200}{2}$ tirages possibles.
- a.** La probabilité que ce soit deux pièces $P1$ est :

$$\frac{\binom{100}{2}}{\binom{200}{2}} = \frac{\frac{200 \times 199}{2 \times 1}}{\frac{200 \times 199}{2 \times 1}} \approx 0,2487.$$

- b.** La probabilité que ce soit deux pièces, l'une $P1$ et l'autre $P2$, est :

$$\frac{\binom{100}{1} \times \binom{100}{1}}{\binom{200}{2}} = \frac{100 \times 100}{\frac{200 \times 199}{2 \times 1}} \approx 0,5025.$$

- c.** Il y a $0,6 \times 200 = 120$ pièces fabriquées par le sous-traitant $S1$ et donc $200 - 120 = 80$ pièces fabriquées par $S2$. La probabilité que les deux pièces choisies soient fabriquées par le même fournisseur est :

$$\frac{\binom{120}{2}}{\binom{200}{2}} + \frac{\binom{80}{2}}{\binom{200}{2}} = \frac{120 \times 119}{200 \times 199} + \frac{80 \times 79}{200 \times 199} = \frac{103}{199}.$$

3. D'après le tableau la durée de vie d'une pièce P1 fabriquée par S1 est 0,2. La probabilité que cette durée de vie soit inférieure à 5 ans est donc :

$$p(X \leq 5) = \int_0^5 0,2e^{-0,2t} dt = [-e^{-0,2t}]_0^5 = 1 - e^{-0,2 \times 5} = 1 - e^{-1} \approx 0,6321.$$

FIGURE 3 – Annexe (à rendre avec la copie)

