Correction du baccalauréat S Antilles–Guyane juin 2003

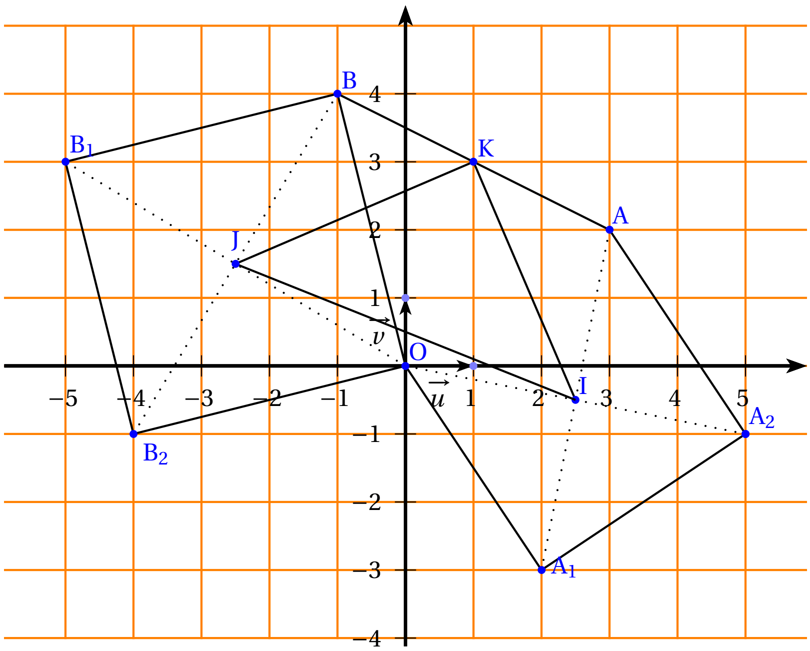
EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. **a.** La rotation de centre A qui transforme O en A_2 a pour angle $\dfrac{\pi}{2}$ Son écriture complexe est de la forme : $z' - (3+2\text{i}) = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}[z - (3+2\text{i})]$.
Avec $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = \text{i}$, on obtient $z' = 3+2\text{i}+\text{i}z-3\text{i}+2 \iff z' = \text{i}z+5-\text{i}$.
En particulier $z_{A_2} = 5-\text{i}$.
Le centre I du carré OA_1A_2A est le milieu du segment $[OA_2]$, donc
$z_I = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}$.

 b. La rotation de centre B qui transforme O en B_1 a pour angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Son écriture complexe est de la forme :
$z' - (-1+4\text{i}) = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}}[z - (-1+4\text{i})]$; comme $\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{2}} = -\text{i}$, l'égalité précédente s'écrit $z' - (-1+4\text{i}) = -\text{i}[z - (-1+4\text{i})] \iff z' = -1+4\text{i}-\text{i}z-\text{i}-4 \iff$
$z' = -\text{i}z-5+3\text{i}$.
En particulier $z_{B_1} = -5+3\text{i}$.
Donc le centre J du carré OBB_1B_2 est le milieu du segment $[OB_1]$, et par conséquent $z_J = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}\text{i}$.

2. $z_K = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 1+3\text{i}$.
$\text{KI} = |z_I - z_K| = \left|\dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{2}\text{i}\right| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{49}{4}} = \sqrt{\dfrac{58}{4}} = \dfrac{\sqrt{58}}{2}$.
$\text{KJ} = |z_J - z_K| = \left|-\dfrac{7}{2} - \dfrac{3}{2}\text{i}\right| = \dfrac{\sqrt{58}}{2}$.
$$\left(\overrightarrow{\text{KI}}, \overrightarrow{\text{KJ}}\right) = \arg\left(\frac{z_J - z_K}{z_I - z_K}\right) = \arg\left(\frac{-\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\text{i}}{\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\text{i}}\right) = \arg\left(-\text{i}\frac{-\frac{7}{2}\text{i} + \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{7}{2}\text{i}}\right) = \arg(-\text{i}) = -\frac{\pi}{2}$$
(à 2π près).
Conclusion : le triangle IKJ est isocèle rectangle en K.



EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats qui n'ont pas suivi l'enseignement de spécialité

On note :
— S l'évènement « la pièce présente un défaut de soudure »
— C l'évènement « la pièce présente un défaut de composant électronique »
— D l'évènement « la pièce est défectueuse ».

1. Les évènements S et C sont indépendants, donc :

$$p(\mathrm{S} \cap \mathrm{C}) = p(\mathrm{S}) \times p(\mathrm{C})$$

et comme $\mathrm{D} = \mathrm{S} \cup \mathrm{C}$, $p(\mathrm{D}) = p(\mathrm{S}) + p(\mathrm{C} - p(\mathrm{S} \cap \mathrm{C}) = 0,03 + 0,02 - 0,03 \times 0,02 = 0{,}0494$.

2. a. La loi de X est une loi binomiale de paramètres $n = 800$ et $p = 0{,}0494$.
On a pour tout entier $k \in [0~;~800]$,
$p(X = k) = \binom{800}{k}(0{,}0494)^k(1 - 0{,}0494)^{800-k}$.

b. $\mathrm{E(X)} = n \times p = 800 \times 0{,}0494 = 39,52$. Ceci représente la moyenne d'articles défectueux dans un lot de 800.

3. a. On note Y la variable aléatoire qui associe le nombre d'articles défectueux parmi les 25 commandés. Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 25$ et $p = 0{,}0494$.D'où :
$p(Y > 2) = 1 - p(Y = 0) - p(Y = 1) - p(Y = 2)$
$= 1 - 0{,}0494^0(1 - 0{,}0494)^25 - 25 \times 0{,}0494^1 \times (1 - 0{,}0494)^24 - 300 \times 0{,}0494^2 \times (1 - 0{,}0494)^{23} \approx 0{,}1237$, soit :
$p(Y > 2) \approx 0,124$ à 10^{-3} près.

b. On note Y_n la variable aléatoire associée au nombre d'articles défectueux parmi les n commandés.
Y_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}0494$. La probabilité d'avoir au moins un article défectueux est $1 - [1 - 0{,}0494]^n = 1 - 0{,}9506^n$.
Le petit commerçant veut donc que :
$1 - 0{,}9506^n \leqslant 0,5 \iff 0{,}9506^n \geqslant 0,5 \iff n \ln 0{,}9506 \geqslant \ln 0,5 \iff$
$n \leqslant \dfrac{\ln 0,5}{\ln 0{,}9506} \approx 13,6$ (car $\ln(0,5) < 0$).
Il devra donc commander au plus 13 articles.

4. La variable aléatoire qui à tout article associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,0007. La densité de probabilité de cette variable est la fonction f définie par :

$$f(x) = 0{,}0007\mathrm{e}^{-0{,}0007x}.$$

Donc : $p([700~;~1000]) = \displaystyle\int_{700}^{1000} 0{,}0007\mathrm{e}^{-0{,}0007x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-0{,}0007x}\right]_{700}^{1000} \approx 0{,}11604$.
La probabilité est donc d'environ $0,116$ à 10^{-3} près.

EXERCICE 2 **5 points**
Pour les candidats qui ont suivi l'enseignement de spécialité

1. a. $(1 + \sqrt{6})^2 = 7 + 2\sqrt{6}$;
$(1 + \sqrt{6})^4 = \left(7 + 2\sqrt{6}\right)^2 = 73 + 28\sqrt{6}$;
$(1 + \sqrt{6})^6 = (1 + \sqrt{6})^2(1 + \sqrt{6})^4 = \left(7 + 2\sqrt{6}\right)\left(73 + 28\sqrt{6}\right) = 847 + 342\sqrt{6}$.

b. On a les divisions suivantes :

$$847 = 2 \times 342 + 163342 = 2 \times 163 + 16163 = 10 \times 16 + 316 = 5 \times 3 + 1$$

L'avant dernier reste est égal à 1; donc pgcd(847; 342) = 1 ou encore 847 et 342 sont premiers entre eux.

Autre méthode : en utilisant pgcd$(a\,;\,b) = \text{pgcd}(a-b)\,;\,b)$;

pgcd(847; 342) = pgcd(505; 342) = pgcd(163; 302) = pgcd(163; 139) = pgcd(24; 139) = pgcd(24; 19) = pgcd(5; 19) = pgcd(5; 4) = 1.

2. Avec $n \in \mathbb{N}$ et avec a_n et b_n tels que :

$$\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$$

on sait déjà (d'après la question 1. a.) que $a_1 = 1$; $b_1 = 1$; $a_2 = 7$; $b_2 = 2$; $a_4 = 73$; $b_4 = 28$; $a_6 = 847$; $b_6 = 342$.

a. On a d'une part $\left(1+\sqrt{6}\right)^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{6}$ et également :
$\left(1+\sqrt{6}\right)^{n+1} = \left(1+\sqrt{6}\right)^{n}\left(1+\sqrt{6}\right) = \left(a_n + b_n\sqrt{6}\right)\left(1+\sqrt{6}\right) =$
$a_n + 6b_n + (a_n + b_n)\sqrt{6}$. Comme $a_n + 6b_n \in \mathbb{N}$ et $a_n + b_n \in \mathbb{N}$, on en déduit par identification que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n + 6b_n \\ b_{n+1} & = & a_n + b_n \end{array}\right.$$

b. On a $a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + 7b_n = 2(a_n + b_n) + 5b_n$.
Par contraposition, si 5 divise $a_{n+1} + b_{n+1}$, alors 5 divise $a_{n+1} + b_{n+1} - 5b_n$ c'est-à-dire $2(a_n + b_n)$. Comme 5 est premier avec 2, 5 divise $a_n + b_n$.
Par contraposition : si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas $a_{n+1} + b_{n+1}$.
Démonstration par récurrence :

- Initialisation : 5 ne divise pas $a_1 + b_1 = 2$;
- Hérédité : on l'a démontrée juste au-dessus.

Conclusion : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

c. Si pour $n \in \mathbb{N}$, d est un diviseur premier de a_{n+1} et b_{n+1}, alors d divise $a_{n+1} - b_{n+1} = 5b_n$.
Or on vient de voir que $d \neq 5$, donc d divise b_n. Mais il divise aussi $b_{n+1} - b_n = a_n$.
Mais d'après la question précédente, a_n et b_n sont premiers entre eux, donc $d = 1$, et a_{n+1} et b_{n+1} sont aussi premiers entre eux.
Comme au départ a_1 et b_1 sont premiers entre eux, on a démontré par récurrence que a_n et b_n sont premiers entre eux.

PROBLÈME 10 points

Partie A

1. La fonction h somme et produit de fonctions dérivables est dérivable et $h'(x) - 2h(x) = 2\mathrm{e}^{2x} + 4x\mathrm{e}^{2x} - 4x\mathrm{e}^{2x} - 2 = 2\mathrm{e}^{2x} - 2 = 2\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right)$.
h est bien une solution de (E).

2. y solution de (E) $\iff (z+h)' - 2(z+h) = 2\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right) \iff z' - 2z + h' - 2h = 2\left(\mathrm{e}^{2x} - 1\right) \iff z' - 2z = 0$ car h est solution de (E).
Conclusion : y solution de (E) si et seulement si $z' - 2z = 0$.

On sait que les solutions de cette équation sont les fonctions $x \longmapsto z(x) = C\mathrm{e}^{2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Finalement $y = z + h$ est solution de (E) si et seulement si $y = C\mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} + 1 = y(x) = (C + 2x)\mathrm{e}^{2x} + 1$.

3. La solution y de (E) telle que $y(0) = 0 \iff 0 = C + 1 \iff C = -1$.
Cette solution g est donc définie par :

$$g(x) = (2x - 1)\mathrm{e}^{2x}.$$

Partie B : étude de g

1. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} + 2(2x - 1)\mathrm{e}^{2x} = 4x\mathrm{e}^{2x}$ dont le signe est celui de x puisque $\mathrm{e}^{2x} > 0$, quel que soit le réel x. On en déduit le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations de g puisque $g(0) = 0$, cette dernière valeur est le minimum de la fonction et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$.

2. a. $1 - g(x) \geqslant 0 \iff g(x) \leqslant 1 \iff (2x - 1)\mathrm{e}^{2x} \leqslant 0$.
Or $\mathrm{e}^{2x} > 0$ donc $1 - g(x) \geqslant 0 \iff 2x - 1 \leqslant 0 \iff x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

$$S = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$$

b. Calcul de $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (1 - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2x)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. On utilise une intégration par parties en posant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & 1 - 2x \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{2x} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{lcl} u'(x) & = & -2 \\ v(x) & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \end{array}$$

Toutes ces fonctions étant continues sur l'intervalle d'intégration,
$\mathrm{I} = \left[\dfrac{1}{2}(1 - 2x)\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2 \times \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(1 - 2x)\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} =$
$\left[(1 - x)\mathrm{e}^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \dfrac{\mathrm{e}}{2} - 1$.

c. La question a. montre que la courbe représentative de g est au dessous de la droite d'équation $y = 1$ sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$. L'intégrale I est donc égale à l'aire , en unité d'aire de la surface comprise entre le graphe de g la droite $y = 1$ et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

Partie C

1. • On a $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{2x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0_{(+)}$.

• On peut écrire $f(x) = 2\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{2\times 0}}{2x - 2 \times 0}$. La limite de ce quotient lorsque x tend vers 0 est 2. (car $\displaystyle\lim_{X \to 0} \frac{\mathrm{e}^{X} - 1}{X} = 1$.)

- On écrit $f(x) = 2\dfrac{\text{e}^{2x}}{2x} - \dfrac{1}{x}$. Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\text{e}^{2x}}{2x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
  Finalement $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. La deuxième limite montre que l'axe des abscisses est asymptote au voisinage de moins l'infini de la courbe représentative de f.

3. La fonction f est dérivable (sauf en 0) et $f'(x) = \dfrac{2x\text{e}^{2x} - \text{e}^{2x} + 1}{x^2} = \dfrac{(2x-1)\text{e}^{2x} + 1}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}$. Or on a démontré que $g(x) \geqslant 0$, donc $\dfrac{g(x)}{x^2} > 0$ et $\dfrac{1}{x^2} > 0$, donc $f'(x) > 0$. Donc pour tout x non nul, la dérivée $f'(x)$ est supérieure à zéro.

La fonction f est donc (strictement) croissante sur les intervalles $]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;\,+\infty[$.

On en déduit le tableau de variations suivant de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
f	0	$\nearrow$	2 || 2	$\nearrow$	

4. Tableau de valeurs :

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$-0{,}05$	$0{,}05$	$0{,}1$	$0{,}2$	$0{,}5$	1
$f(x)$	0,49	0,63	0,86	1,26	1,65	1,81	1,90	2,10	2,21	2,46	3,44	6,39

Courbe représentative de f : attention, $f(0)$ n'existe pas.