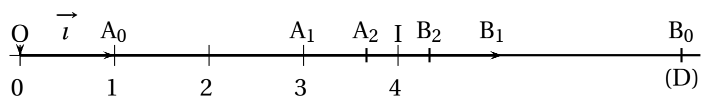
Corrigé du baccalauréat S
Antilles-Guyane juin 2004

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1,\ b_0 = 7$ et $\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{array}\right.$

1. On calcule $a_1 = 3,\ b_1 = 5,\ a_2 = \dfrac{11}{3},\ b_2 = \dfrac{13}{3}$.



2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$.

On a $u_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) - \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) = \dfrac{1}{3}(-a_n + b_n) = \dfrac{1}{3}u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = b_0 - a_0 = 7 - 1 = 6$.

Produit de deux facteurs supérieur à zéro, u_n en fonction de n. On sait que $u_n = u_0 \times r^n$ soit ici $u_n = 6 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 2 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

3. Produit de deux facteurs supérieurs à zéro, u_n est supérieur à zéro.

Or $u_n > 0 \iff b_n - a_n > 0 \iff b_n > a_n$.

Variations de a_n :

Quel que soit n, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) - a_n = \dfrac{1}{3}(-a_n + b_n) = \dfrac{1}{3}u_n > 0$, d'après ci-dessus. On a donc $a_{n+1} - a_n > 0 \iff a_{n+1} > a_n$.

La suite (a_n) est donc croissante.

Variations de b_n :

On a de même quel que soit n,

$b_{n+1} - b_n = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) - b_n = -\dfrac{1}{3}(b_n - a_n) = -\dfrac{1}{3}u_n < 0$.

On a donc $b_{n+1} - b_n < 0 \iff b_{n+1} < b_n$.

La suite (b_n) est donc décroissante.

Géométriquement : les points A_n se placent de gauche à droite, et les points B_n de droite à gauche, les premiers étant toujours à gauche des seconds.

4. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes :

L'une est croissante, l'autre décroissante et la différence $b_n - a_n = u_n = 2 \times \dfrac{1}{3^{n-1}}$. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \dfrac{1}{3}(a_n + 2b_n) + \dfrac{1}{3}(2a_n + b_n) = \dfrac{1}{3}(3a_n + 3b_n) = a_n + b_n = u_n$.

La suite (v_n) est donc une suite constante. En particulier $u_n = u_0 = a_0 + b_0 = 1 + 7 = 8$.

En conséquence l'abscisse du milieu du segment $[A_nB_n]$ est $\dfrac{8}{2} = 4$.

Tous les segments $[A_nB_n]$ ont donc le même milieu d'abscisse 4, c'est-à-dire I.

6. On peut conclure de ce qui précède que les suites sont convergentes de limite commune ℓ. Par conséquent la suite v_n est convergente de limite $\ell + \ell = 2\ell = 8$, d'après la question 5.

Conclusion : les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes de limite $\ell = 4$.
Interprétation géométrique : les points A_n (par la gauche) et B_n (par la droite) se rapprochent du point I.

On peut également déduire du système $\left\{\begin{array}{rcccl} u_n &=& -a_n + b_n &=& \dfrac{2}{3^{n-1}}\\ v_n &=& a_n + b_n &=& 8\end{array}\right.$ que :

$\left\{\begin{array}{rcl} a_n &=& 4 - \dfrac{1}{3^{n-1}}\\ b_n &=& 4 + \dfrac{1}{3^{n-1}}\end{array}\right.$

Les résultats précédents en découlent : on constate de plus que les points se rapprochent d'une distance à chaque fois trois plus petite que la précédente du point I.

EXERCICE 2 **7 points**

Commun à tous les candidats

On note $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_k(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t$.

1. Comme $a \geqslant 0,\ 1+t>0$ sur $[0~;~a]$, donc $I_0(a) = [\ln(1+t)]_0^a = \ln(1+a)$.

2. $I_1(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t-a}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

À l'aide d'une intégration par parties, en posant pour $t \geqslant 0$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(t) = t-a &;& v'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}\\ u'(t) = 1 &;& v(t) = -\dfrac{1}{1+t}\end{array}\right. ,$$

on obtient par continuité des fonctions u' et v' :

$I_1(a) = \left[-\dfrac{t-a}{1+t}\right]_0^a + \displaystyle\int_0^a \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t-a}{1+t} + \ln(1+t)\right]_0^a = \ln(1+a) - a.$

3. De même à l'aide d'une intégration par parties, en posant pour $t \geqslant 0$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(t) = (t-a)^{k+1} &;& v'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^{k+2}}\\ u'(t) = (k+1)(t-a)^k &;& v(t) = -\dfrac{1}{(k+2-1)(1+t)^{k+2-1}} = \dfrac{-1}{(k+1)(1+t)^{k+1}}\end{array}\right. ,$$

on obtient par continuité de u' et v' pour $t \geqslant 0$,

$I_{k+1}(a) = \left[\dfrac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)(1+t)^{k+1}}\right]_0^a + \displaystyle\int_0^a \frac{(t-a)^k}{(1+t)^{k+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{(-a)^{k+1}}{k+1} + I_k(a) =$

$I_{k+1}(a) = \dfrac{(-1)^{k+1}a^{k+1}}{k+1} + I_k(a)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $a \geqslant 0$.

4. Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x$.

En utilisant la relation de récurrence précédente,

$I_2(a) = \dfrac{a^2}{2} + I_1(a) = \ln(1+a) - a + \dfrac{a^2}{2}$,

$I_3(a) = \dfrac{-a^3}{3} + I_2(a) = \ln(1+a) - a + \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^3}{3}$,

$I_4(a) = \dfrac{a^4}{4} + I_3(a) = \ln(1+a) - a + \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^3}{3} + \dfrac{a^4}{4}$,

$I_5(a) = \dfrac{-a^5}{5} + I_4(a) = \ln(1+a) - a + \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^3}{3} + \dfrac{a^4}{4} - \dfrac{a^5}{5}$.

La dernière égalité peut s'écrire d'après la définition de P,

$I_5(a) = \ln(1+a) - P(a)$.

5. $J(a)=\displaystyle\int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t-a)^6}{6}\right]_0^a=-\frac{a^6}{6}$.

6. **a.** En partant de l'encadrement :
$0\leqslant t\leqslant a\Rightarrow 1\leqslant 1+t\leqslant 1+a\Rightarrow 1^6\leqslant(1+t)^6\leqslant(1+a)^6$
(par croissance de la fonction $x\longmapsto x^6$), $\Rightarrow 0<\dfrac{1}{(1+a)^6}\leqslant\dfrac{1}{(1+t)^6}\leqslant 1\Rightarrow$
$(t-a)^5\leqslant\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\leqslant\dfrac{(t-a)^5}{(1+a)^6}\leqslant 0$ (car $t-a\leqslant 0$.
Conclusion : pour tout $t\in[0\,;\,a]$, $\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\geqslant(t-a)^5$.

b. On vient de démontrer que $(t-a)^5\leqslant\dfrac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\leqslant 0$.
On intègre cette double inégalité entre 0 et a pour obtenir :

$$\int_0^a (t-a)^5\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^a\frac{(t-a)^5}{(1+t)^6}\,\mathrm{d}t\leqslant 0$$

soit, $J(a)\leqslant I_5(a)\leqslant 0$.

7. D'après la question 4, $I_5(a)=\ln(1+a)-P(a)$ ce qui implique
$|I_5(a)|=|\ln(1+a)-P(a)|=-I_5(a)$, car d'après la question précédente
$I_5(a)\leqslant 0$. On a vu que $J(a)\leqslant I_5(a)\leqslant 0$ soit en prenant les opposés :
$0\leqslant I_5(a)\leqslant -J(a)$.
On a donc $|\ln(1+a)-P(a)|\leqslant -J(a)$ soit finalement :
Pour tout $a\in[0\,;\,+\infty[$, $|\ln(1+a)-P(a)|\leqslant\dfrac{a^6}{6}$.

8. Pour avoir une approximation à 10^{-3} près il suffit que
$\dfrac{a^6}{6}\leqslant 10^{-3}\iff a^6\leqslant 6\cdot 10^{-3}\iff a\leqslant\left(6\cdot 10^{-3}\right)^{1/6}$.
La calculatrice donne $a\leqslant 0,426\,2$.
Un intervalle sur lequel $P(a)$ est une valeur approchée de $\ln(1+a)$ à 10^{-3} près est donc $[0\,;\,0,426]$.

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

On pose $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :
$z^2=\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+\mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2=2+\sqrt{2}-\left(2-\sqrt{2}\right)+2\mathrm{i}\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=$
$2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}=2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}$. Réponse b

2. z^2 s'écrit sous forme exponentielle :
On a $\left|z^2\right|^2=8+8=16=4^2$. Donc $z^2=4\left(\dfrac{\sqrt{2}2}{+}\mathrm{i}\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right)=4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)-\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=$
$4\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$. Réponse b.

3. z s'écrit sous forme exponentielle :
Le module de z est 2. Un de ses arguments θ est tel que $2\theta=-\dfrac{\pi}{4}\quad[2\pi]\iff$
$\theta=-\dfrac{\pi}{8}\quad[\pi]$.
L'énoncé montre que la partie réelle est négative : l'argument est donc $\theta=-\dfrac{\pi}{8}+\pi=\dfrac{7\pi}{8}$.
Conclusion : $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$. Réponse a.

4. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

On a trouvé que $z = 2\left(-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$, ces quotients étant le cosinus et le sinus de $\dfrac{7\pi}{8}$.

On sait que $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ et que $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$. Donc $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus du supplément à π de $\dfrac{7\pi}{8}$, donc de $\dfrac{\pi}{8}$. Réponse D.

EXERCICE 4 **5 points**

Pour les candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. a. Soit G_1 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ -1)\ ;\ (D,\ 1)\}$.

Ce barycentre existe puisque la somme $1+1-1+1$ est non nulle et par définition :

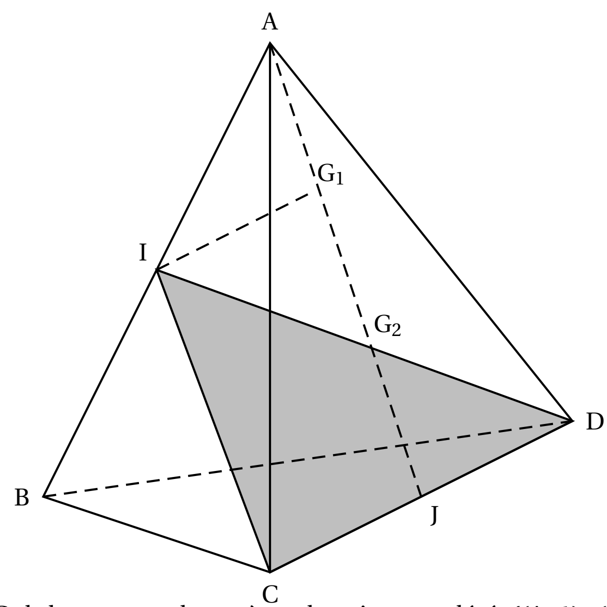
$\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} - \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \overrightarrow{0}$ et d'autre part $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

La première égalité vectorielle peut s'écrire

$\overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{G_1I} - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{G_1I} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0} \iff$

$2\overrightarrow{G_1I} + \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) - \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{IG_1} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{IG_1} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

Placez I, J et G_1 sur la figure (voir ci-dessous). L'égalité trouvée montre que les droites (IG_1) et (CD) sont parallèles. On a de plus $\overrightarrow{IG_1} = \overrightarrow{CJ}$.



b. Soit G_2 le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (D,\ 2)\}$.

D'après l'associativité G_2 est aussi le barycentre de $\{(I,\ 2), (D, 2)\}$ soit le milieu de [ID]

c. On sait que J milieu de [CD] peut s'écrire $\overrightarrow{JD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{IG_1}$.

Conclusion : $\overrightarrow{IG_1} = \overrightarrow{JD}$ équivaut à IG_1DJ est un parallélogramme.

Ses diagonales [ID] et JG_1 ont donc le même milieu. Or celui de [ID] est G_2 qui est aussi celui de JG_2.

2. Soit m un réel. On note G_m le barycentre du système de points pondérés $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 1)\ ;\ (C,\ m-2)\ ;\ (D,\ m)\}$.

a. Le barycentre G_m existe si $1+1+m-2+m \neq 0 \iff m \neq 0$. On a donc $\mathscr{E} = \mathbb{R} - \{0\}$.

b. Par associativité G_m est le barycentre de {I, 2), (C, $m-2$) ; (D, m)}, appartient au plan (ICD).

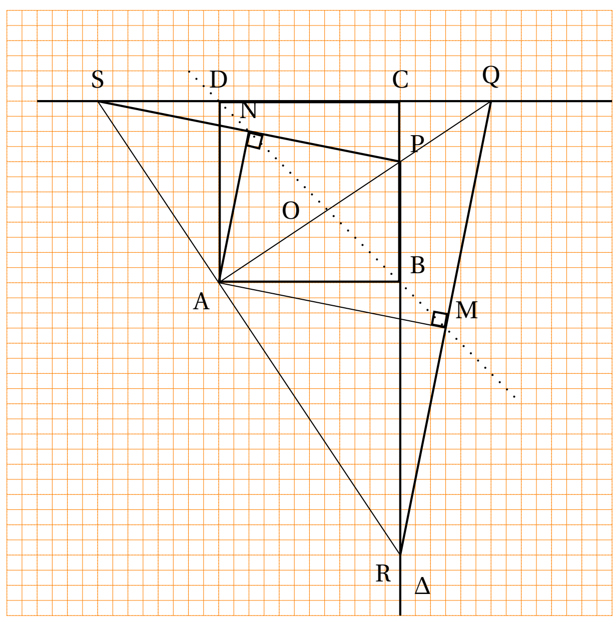
c. Par définition du barycentre $\overrightarrow{G_m\mathrm{A}} + \overrightarrow{G_m\mathrm{B}} + (m-2)\overrightarrow{G_m\mathrm{C}} + m\overrightarrow{G_m\mathrm{D}} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{G_m\mathrm{J}} + \overrightarrow{\mathrm{JA}} + \overrightarrow{G_m\mathrm{J}} + \overrightarrow{\mathrm{JB}} + (m-2)\overrightarrow{G_m\mathrm{J}} + (m-2)\overrightarrow{\mathrm{JC}} + m\overrightarrow{G_m\mathrm{J}} + m\overrightarrow{\mathrm{JD}} = \overrightarrow{0} \iff 2m\overrightarrow{\mathrm{J}G_m} = 2\overrightarrow{\mathrm{JI}} - 2\overrightarrow{\mathrm{JC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{CI}}$.
Finalement on a donc $m\overrightarrow{\mathrm{J}G_m} = \overrightarrow{\mathrm{CI}}$ = constante. Démontrez que le vecteur $m\overrightarrow{\mathrm{J}G_m}$ est constant.

d. On a donc pour tout $m \in \mathscr{E}$: $\overrightarrow{\mathrm{J}G_m} = \dfrac{1}{m}\overrightarrow{\mathrm{CI}}$, qui montre que G_m appartient à la parallèle à la droite (CI) contenant J. Comme $m \neq 0$, $\dfrac{1}{m} \neq 0$.
Conclusion : l'ensemble de tous les points G_m est la droite parallèle à (CI) contenant J (c'est-à-dire la droite (JA) d'après les questions précédentes) privée du point J.

EXERCICE 4 — 5 points

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. Faire une figure.



2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. L'image par r de la droite (BC) est une droite perpendiculaire, contenant l'image par r de B, soit D : c'est donc la droite (CD).

b. R = (BC) ∩ (AS). Son image appartient donc aux images es droites (BC), soit (CD) et (AS), soit (AP). l'image de R est donc le point Q.
De même P est le point commun aux droites (BC) et (AQ) ; son image est donc le point commun aux droites (CD) et (AR) : c'est donc le point S.

c. Il en résulte par définition de la rotation (isométrie) que les triangles ARQ et APS sont rectangles isocèles en A.

3. On note N le milieu du segment [PS] et M celui du segment [QR]. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

a. Déterminez les images respectives de R et de P par s. M est le milieu de $[RQ]$, donc $(\mathrm{A}M)$ est médiane et hauteur du rectangle isocèle $\mathrm{A}RQ$. Le triangle $\mathrm{A}MQ$ est donc lui aussi rectangle isocèle (en M) et $\mathrm{A}M = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{A}R$; de plus $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}R}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Conclusion : l'image de R par s est le point M. On démontre de même que l'image de P par s est le point N.

b. N est l'image de P par s et P appartient au segment $[\mathrm{BC}]$ $(P \neq \mathrm{B})$. N appartient donc à l'image du segment $]\mathrm{BC}]$ par s.

Or si O est le centre du carré ABCD, la configuration du triangle ABO est encore une configuration de triangle rectangle isocèle et le point O est l'image de B par s.

Il en de même pour le triangle rectangle isocèle ACD et le point D est l'image de C par s.

Conclusion : l'ensemble des points N est le segment $]\mathrm{OD}]$ (O exclu).

c. On a vu à la question 3 que $M = s(R)$ et $S = s(P)$.

Les quatre points R, B, P et C sont alignés, donc leurs images respectivement M, O, N et D sont alignées.