∽ Corrigé du baccalauréat S Antilles–Guyane ∾ juin 2005

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** L'affixe de E' est $\dfrac{-1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$. Mais $-1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$. Donc E' a pour affixe $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$.

   On sait que $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,donc l'affixe de E' sous forme algébrique est $-\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   b. $\mathscr{C}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$. L'image M' de M par F a pour affixe $\dfrac{-1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Le point M' est donc le symétrique de M autour de O. Conclusion : l'image de $\mathscr{C}_1$ est le cercle $\mathscr{C}_1$.

2. **a.** L'affixe de K' est $\dfrac{-1}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}$. Comme ci-dessus $-1 = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$, donc l'affixe de K' est $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   b. K appartient à $\mathscr{C}_2$ qui est l'ensemble des points M d'affixe $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$. L'image M' de M par F a pour affixe $\dfrac{-1}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}$ soit $-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Le point M' est donc comme l'image de M dans l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{1}{4}$. Conclusion : l'image de $\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

3. **a.** On a $z' + 1 = \dfrac{-1}{\overline{z}} + 1 = \dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z}}$.

   Ceci entraîne que $|r' + 1| = \left|\dfrac{\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} - 1}{\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}}\right|$. Or $\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$,

$$|r' + 1| = \left|\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}}\right| = \dfrac{|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}|}{\overline{|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}} = \dfrac{1}{\overline{|1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}} = \left|\dfrac{-1}{\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}}\right|.$$

   D'après la définition de F, $\dfrac{-1}{\overline{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}}$ est l'affixe de l'image du point d'affixe $1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Conclusion : $|r' + 1| = |r'|$.

   b. $r' + 1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{B}R'}$ et r' celle du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O}R'}$. La relation $|r' + 1| = |r'|$ établie en **a.** signifie que $\left\|\overrightarrow{\mathrm{B}R'}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{O}R'}\right\|$ donc que l'image R' de R est équidistante des points d'affixes -1 et 0 : R' appartient par conséquent à la médiatrice de [OB].

EXERCICE 1 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** $7^1 \equiv 7\ (9)$ $\quad 7^2 \equiv 4\ (9)$ $\quad 7^3 \equiv 1\ (9)$.

   Donc $7^4 \equiv 7\ (9)$ $\quad 7^5 \equiv 4\ (9)$ ...

   Donc si $n \equiv 1\ (3)$ alors $7^n \equiv 7\ (9)$, si $n \equiv 2\ (3)$ alors $7^n \equiv 4\ (9)$ et si $n \equiv 0\ (3)$ alors $7^n \equiv 1\ (9)$.

   b. $2005 \equiv 7\ (9)$ donc $(2005)^{2005} \equiv 7^{2005}\ (9)$.

   Or $2005 \equiv 1\ (3)$ donc $7^{2005} \equiv 7\ (9)$ donc $(2005)^{2005} \equiv 7\ (9)$.

2. **a.** Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n : $(10)^n \equiv 1$ (9).

Initialisation : si $n = 1$, alors $10^1 \equiv 1$ (9). La relation est vraie au rang 1.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ et supposons que $(10)^p \equiv 1$ (9). Alors $(10)^p \times 10 \equiv 10$ (9) donc $(10)^{p+1} \equiv 1$ (9).

La propriété est vraie pour $n = 1$, elle est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n non nul.

b. Soit $a_n ; a_{n-1} ; \ldots ; a_1 ; a_0$ les chiffres de l'entier naturel N écrit en base dix, avec $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$.

$N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$.

donc $N \equiv a_n \times 1 + a_{n-1} \times 1 + \cdots + a_1 \times 1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv S$ (9).

c. N est divisible par 9 $\Leftrightarrow N \equiv 0$ (9) $\Leftrightarrow S \equiv 0$ (9) $\Leftrightarrow S$ est divisible par 9.

3. **a.** D'après la question 2 (b), $A \equiv B$ (9), $B \equiv C$ (9), $C \equiv D$ (9). Par transitivité de la relation d'équivalence, $A \equiv D$ (9).

b. $2005 < 10\,000$ donc $2005^{2005} < 10\,000^{2\,005}$ donc $A < 10^{4 \times 2\,005}$ soit $A < 10^{8\,020}$.

Ceci prouve que que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres.

Si chacun des chiffres de A était 9, B vaudrait $9 \times 8\,020 = 72\,180$. Donc $B \leqslant 72\,180$.

c. Comme $B \leqslant 72\,180$, alors B s'écrit en numération décimale avec au plus 5 chiffres.

Si chacun des chiffres de B était 9, C vaudrait $9 \times 5 = 45$. Donc $C \leqslant 45$.

d. Parmi tous les entiers inférieurs ou égaux à 45, celui qui a la plus grande somme de ses chiffres est 39. Donc $D \leqslant 12$.

e. Comme $A \equiv D$ (9) d'après la question 3 (a) et $A \equiv 7$ (9) d'après la question 1. b., alors $D \equiv 7$ (9). Comme $0 < D \leqslant 12$, alors $D = 7$.

EXERCICE 1 (autre corrigé) — 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. **a.** On a successivement $7^1 \equiv 7$ (9), $7^2 \equiv 4$ (9) et $7^3 \equiv 1$ (9). Donc :

si $n \equiv 1\,(3)$ alors $7^n \equiv 7$ (9) ;
si $n \equiv 2\,(3)$ alors $7^n \equiv 4$ (9) ;
si $n \equiv 3\,(3)$ alors $7^n \equiv 1$ (9).

b. $2005 \equiv 7\,(9)$ donc $(2005)^{2005} \equiv 7^{2005}$ (9).

Or $2005 \equiv 1\,(3)$. Donc, d'après le résultat du **a.** ci-dessus, $2005^{2005} \equiv 7\,(9)$.

2. **a.** $10 \equiv 1\,(9)$ donc, pour tout entier naturel n, $10^n \equiv 1\,(9)$.

b. Soit $N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ un entier naturel écrit en base 10.

On sait que $N = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0$ et par suite que $S = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$.

D'après **a.**, $a_p \times 10^p \equiv a_p$ (9). On a donc $N \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$ (9).

Ou encore $N \equiv S\,(9)$.

c. Il en résulte que, pour que N soit divisible par 9, il faut et il suffit que son reste dans la division par 9, à savoir ici S, soit divisible par 9.

3. **a.** En appliquant **c.** on obtient successivement :

$A \equiv B\,(9)$, $B \equiv C$ (9) et $C \equiv D\,(9)$ donc par transitivité $A \equiv D\,(9)$.

b. $2\,005 < 10^4$ donc $(2\,005)^{2\,005} < 10^{4\times 2\,005}$. Or $4 \times 2\,005 = 8\,020$ et par suite $(2\,005)^{2\,005} < 10^{8\,020}$. Donc A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres.

Le plus grand des nombres à 8 020 chiffres est $\underbrace{999\cdots 99}_{8\,020 \text{ fois le chiffre } 9}$; la somme de ses chiffres est alors égale à $8\,020\times 9 = 72\,180$.

Sachant que $A < 10^{8\,020}$ il en résulte donc que la somme des chiffres de A, soit B, est au plus égale à la somme des chiffres du plus grand nombre à 8 020 chiffres. D'où $B \leqslant 72\,180$.

c. De la même façon $72\,180 \leqslant 99\,999$ montre que la somme C des chiffres de B est inférieure à $9 \times 5 = 45$.

d. En examinant les entiers inférieurs à 45 on remarque que celui dont la somme des chiffres est la plus grande est 39, de somme de chiffres 12. Donc $D \leqslant 12$.

e. On sait que $A \equiv 7\,(9)$ et que $A \equiv D\,(9)$ d'où il résulte que $D \equiv 7\,(9)$.

Or le seul nombre inférieur à 12 vérifiant cette condition est 7. Donc $D = 7$.

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

1. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $[0~;~1]$ on a $x+n \in [n~;~n+1]$ soit $n \leqslant n+x \leqslant n+1$.

Inégalité de gauche : on a

$(n+x)(n-x) = n^2 - x^2 \leqslant n^2$ (puisque $x^2 \geqslant 0$.

Soit $(n+x)(n-x) \leqslant n^2 \iff n-x \leqslant \dfrac{n^2}{n+x}$, (car $n+x>0$) $\iff$

$\dfrac{n-x}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n+x} \iff \dfrac{1}{n} - \dfrac{x}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n+x}$.

Inégalité de droite : pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $[0~;~1]$ on a

$x+n \in [n~;~n+1]$ soit $n \leqslant n+x \leqslant n+1 \iff \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{x+n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ (rangement classique des inverses).

En regroupant : $\dfrac{1}{n} - \dfrac{x}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n+x} \leqslant \dfrac{1}{n}$

2. a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+n)\Big]_0^1 = \ln(1+n) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

b. D'après **1.**, les termes à intégrer étant tous positifs

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2}\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n}\,\mathrm{d}x.$$

Soit $\left[\dfrac{x}{n} - \dfrac{x^2}{2n^2}\right]_0^1 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,\mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{x}{n}\right]_0^1$, soit finalement

$\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

3. $U(n+1) - U(n) = \dfrac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \dfrac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n]$.

Soit $U(n+1) - U(n) = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

En utilisant l'inégalité de gauche du **2. b.** :

$\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \iff -\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{n}$, donc

$U(n+1) - U(n) \leqslant \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{n}$.

Or $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2n^2}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{2n^2+n+1-2n(n+1}{2n(n+1)}=\dfrac{2n^2+n+1-2n^2-2n}{2n(n+1)}=\dfrac{1-n}{2n(n+1)}$.
Ce quotient est du signe du numérateur, or $n \geqslant 1 \iff 1-n \leqslant 0$.

On a donc démontré que pour tout $n \geqslant 1$, $U(n+1)-U(n) \leqslant 0$: la suite est donc décroissante.

4. $V(n+1)-V(n)=\dfrac{1}{n+1}+\ln(n+1)-\ln(n+2)=\dfrac{1}{n+1}-[\ln(n+2)-\ln(n+1)]$.

Soit $V(n+1)-V(n)=\dfrac{1}{n+1}-\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$.

Or il résulte de **2. b.** en remplaçant n par $n+1$ que $\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.

Donc $V(n+1)-V(n)\geqslant 0$: la suite V est croissante.

5. $U(n)-V(n)=\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

Mais $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=0$. Par suite
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(U(n)-V(n))=0$.

Les suites U et V sont respectivement décroissante et croissante et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(U(n)-V(n))=0$: elles sont donc adjacentes, par conséquent elles convergent et ont la même limite γ.

$|U(n)-V(n)|\leqslant 10^{-2}$ si et seulement si $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\leqslant 10^{-2}$, soit si et seulement si $\dfrac{n+1}{n}\leqslant \mathrm{e}^{0,01}$.

Or $\dfrac{n+1}{n}=1+\dfrac{1}{n}$. Donc $|U(n)-V(n)|\leqslant 10^{-2}$ si et seulement si $\dfrac{1}{n}\leqslant \mathrm{e}^{0,01}-1$ et par suite si et seulement si $n\geqslant\dfrac{1}{\mathrm{e}^{0,01}-1}$.

La calculatrice donne $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{0,01}-1}\approx 99,5008\ldots$.

En prenant $n\geqslant 100$ on est sûr que $|U(n)-V(n)|\leqslant 10^{-2}$.

La calculatrice donne $U_{100}\approx 0,582$ et $V_{100}\approx 0,583$. De l'encadrement :

$$0,572\leqslant\gamma\leqslant 0,583$$

on en déduit que

$$\gamma=0,58 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}$$

EXERCICE 3 **3 points**
Commun à tous les candidats

1. **b**
2. **c**
3. **c**
4. **c**
5. **b**
6. **a**

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

A.] Soit M un point quelconque du plan médiateur de [KL].

I est milieu du segment [KL] donc(MI) est médiane relative au côté [KL] dans le triangle KML.
La droite (MI), droite du plan perpendiculaire à la droite (KL) en I est donc perpendiculaire à (KL). Donc (MI) est médiatrice du côté [KL] du triangle KML.
Dans le triangle KML, (MI) est médiane et médiatrice : ce triangle est donc isocèle de sommet M. Par suite $M\text{K} = M\text{L}$.
Le plan médiateur de [KL] apparaît donc bien comme l'ensemble des points de l'espace équidistants de K et L.
Autre méthode
$M\text{K} = M\text{L} \iff M\text{K}^2 = M\text{L}^2 \iff M\text{K}^2 - M\text{L}^2 = 0 \iff$
$\left(\overrightarrow{M\text{K}} + \overrightarrow{M\text{L}}\right)\left(\overrightarrow{M\text{K}} - \overrightarrow{M\text{L}}\right) = 0 \iff 2\overrightarrow{M\text{I}} \cdot \overrightarrow{\text{LK}} = 0.$
Donc M est équidistant de K et de L si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M\text{I}}$ et $\overrightarrow{\text{LK}}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si M appartient au plan médiateur de [KL].

B.

1. Soit I le milieu de [AB]. Le point M appartient au plan médiateur de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{\text{I}M} \perp \overrightarrow{\text{AB}}$.
   Comme I $\left(3\,;\,1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{\text{AB}}$ $(-2\,;\,2\,;\,5)$ et M$(x\,;\,y\,;\,z)$, une équation cartésienne du plan médiateur de [AB] est donc : $-2(x-3)+2(y-1)+5\left(z+\dfrac{1}{2}\right) = 0 \iff$
   $-2x+2y+5z+\dfrac{13}{2} = 0 \iff 4x-4y-10z-13 = 0.$
2. Les coordonnées du point commun aux trois plans doivent constituer l'unique solution du système :
   $$(S)\left\{\begin{array}{ll} 4x-4y-10z-13 & = 0\ (1)\\ 2x-10y-6z-7 & = 0\ (2)\\ 3x-3y+2z-5 & = 0\ (3)\end{array}\right.$$
   On ajoute à l'équation (1) multipliée par 3 l'équation (3) multipliée par -4, pour obtenir :
   $$12x-12y-30z-39-12x+12y-8z+20 = 0 \iff -19 = 38z \iff z = -\frac{1}{2}.$$
   En remplaçant z par cette valeur dans les équations (1) et (2), on obtient le système 2×2 suivant
   $$\left\{\begin{array}{ll} 4x-4y & = 8\\ 2x-10y & = 4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x-y & = 2\\ x-5y & = 2\end{array}\right.$$
   qui donne aussitôt $y = 0$ par différence, puis $x = 2$.
   Conclusion : les coordonnées de E sont : $\left(2\,;\,0\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$.
3. D'après la partie A :
   — EA = EB puisque E appartient au plan médiateur de [AB] ;
   — EB = EC puisque E appartient au plan médiateur de [BC] ;
   — EC = ED puisque E appartient au plan médiateur de [CD] ;
   Donc EA = EB = EC = ED.
   Les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère de centre E.
   Or $\overrightarrow{\text{EA}}$ $\left(2\,;\,0\,;\,-\dfrac{5}{2}\right)$, donc $\text{EA}^2 = 4+\dfrac{25}{4} = \dfrac{41}{4}$.
   Le rayon de la sphère est donc égal à $\dfrac{\sqrt{41}}{2}$.