Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2006

Exercice 1

1. Restitution organisée des connaissances

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie et dérivable sur $\text{I} =]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(ax) - \ln(x), \text{ alors}$$

$$f'(x) = \frac{a}{ax} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

Ainsi, f est constante sur $]0~;~+\infty[$, mais:
$f(1) = \ln a - \ln 1 = \ln a$, donc cette constante vaut $\ln a$. D'où :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \ln a \iff \ln(ax) - \ln x = \ln a$$

c'est à dire :

$$\forall x \in I,\ \ln(ax) = \ln x + \ln a$$

2. Pour tous réels strictement positifs a et b :

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) + \ln(b) = \ln\left(\frac{1}{b} \times b\right) = \ln(1) = 0.$$

Donc $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$. De plus,

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

3. On a $0{,}69 \leqslant \ln 2 \leqslant 0{,}70$ et $1{,}09 \leqslant \ln 3 \leqslant 1{,}10$, donc

$$0{,}69 + 1{,}09 \leqslant \ln 2 + \ln 3 \leqslant 0{,}70 + 1{,}10 \iff 1{,}78 \leqslant \ln 6 \leqslant 1{,}80$$

Ainsi $-1{,}80 \leqslant -\ln 6 \leqslant -1{,}78 \iff -1{,}80 \leqslant \ln\left(\frac{1}{6}\right) \leqslant -1{,}78$.
De plus, $\ln 8 = \ln\left(2^3\right) = 3\ln 2$ donc $3 \times 0{,}69 \leqslant \ln 8 \leqslant 3 \times 0{,}70 \iff$
$2{,}07 \leqslant \ln 8 \leqslant 2{,}1$.
Et $-2{,}1 \leqslant -\ln 8 \leqslant -2{,}07$. Ainsi $1{,}09 - 2{,}1 \leqslant \ln 3 - \ln 8 \leqslant 1{,}10 - 2{,}07 \iff$
$-1{,}01 \leqslant \ln\left(\frac{3}{8}\right) \leqslant -0{,}97$.

Exercice 2

1. L'équation $\text{e}^{2x} - 3\text{e}^x - 4 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution (réponse b), car:

$$\begin{aligned}
\text{e}^{2x} - 3\text{e}^x - 4 = 0 &\iff \left\{\begin{array}{l} X = \text{e}^x \\ X^2 - 3X - 4 = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} X = \text{e}^x \\ X = -1 \text{ ou } X = 4 \end{array}\right. \\
&\iff \text{e}^x = -1 \text{ ou } \text{e}^x = 4 \\
&\iff x = \ln 4
\end{aligned}$$

2. L'expression $-\mathrm{e}^{-x}$ est toujours négative (réponse b), car e^{-x} est toujours positive.
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+2}=2$ (réponse c) car:

$$\frac{2\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+2}=\frac{\mathrm{e}^{x}\,(2-1\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^{x}\,(1+2\mathrm{e}^{-x})}=\frac{2-1\mathrm{e}^{-x}}{1+2\mathrm{e}^{-x}}\text{ et }\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$$

4. L'équation différentielle $y=2y'-1$ a pour ensemble de solutions $x\mapsto k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-1$ avec $k\in\mathbb{R}$ (réponse c), car :

$$y=2y'-1\iff y'=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$$

EXERCICE 3

Partie A

Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. Alors:

$$P(X\leqslant a)=\int_0^a\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}.$$

1. La probabilité $P(X\leqslant 1)$ s'interprète comme étant l'aire sous la courbe de la densité comprise entre les droites $x=0$, $x=1$ et $y=0$.
2. Comme la densité de X est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, par $f(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$, alors $f(0)=\lambda$.

   Donc sur le graphique, le paramètre λ est l'ordonnée du point de la courbe de f d'abscisse 0.

Partie B

On pose $\lambda=1{,}5$.

1. $P(X\leqslant 1)=1-\mathrm{e}^{-1{,}5\times1}=1-\mathrm{e}^{-1{,}5}\approx=0,777$
2. $P(X\geqslant 2)=1-P(X\leqslant 2)=\mathrm{e}^{-1{,}5\times2}=\mathrm{e}^{-3}$.
3. Comme $P(1\leqslant X\leqslant 2)=P(X\leqslant 2)-P(X\leqslant 1)$, alors à 10^{-3} près :

$$P(1\leqslant X\leqslant 2)=\mathrm{e}^{-1{,}5}-\mathrm{e}^{-3}=0{,}173.$$

4. Calculons l'intégrale $F(x)=\displaystyle\int_0^x 1{,}5t\mathrm{e}^{-1{,}5t}\,\mathrm{d}t$ en utilisant une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u'=1{,}5\mathrm{e}^{-1{,}5t} & u=-\mathrm{e}^{-1{,}5t}\\ v=t & v'=1\end{array}$$

   Donc

$$\begin{aligned}F(x)&=\left[-t\mathrm{e}^{-1{,}5t}\right]_0^x-\int_0^x-\mathrm{e}^{-1{,}5t}\,\mathrm{d}t\\ &=\left[-t\mathrm{e}^{-1{,}5t}\right]_0^x-\left[\frac{1}{1{,}5}\mathrm{e}^{-1{,}5t}\right]_0^x\\ &=-x\mathrm{e}^{-1{,}5x}-\frac{1}{1{,}5}\mathrm{e}^{-1{,}5x}+\frac{1}{1{,}5}\end{aligned}$$

Mais $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{1}{1,5}$$

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètre, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1{,}5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas.
Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.

a. La probabilité que le cylindre soit accepté est, à 10^{-3} près:

$$p = P(X \leqslant 1) + 0,8 \times P(1 \leqslant X \leqslant 2) = 0,777 + 0,8 \times 0,173 = 0{,}915$$

b. Sachant que le cylindre est accepté, la probabilité qu'il ait subi une rectification est :

$$\frac{0,8 \times P(1 \leqslant X \leqslant 2)}{P(X \leqslant 1) + 0,8 \times P(1 \leqslant X \leqslant 2)}.$$

2. **a.** Comme on prélève de manière indépendante dix cylindres de la production, supposée suffisamment importante pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise, la probabilité que les dix cylindres soient acceptés, est : p^{10}.

b. La probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé, est en utilisant l'évènement contraire : $1 - p^{10}$.

EXERCICE 4
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points

- A d'affixe a, $a \in \mathbb{R}$
- B d'affixe $b + \mathrm{i}$, $b \in \mathbb{R}$
- C image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Comme C est l' image de B dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, alors C a pour affixe :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b + \mathrm{i} - a) + a &= \frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)(b - a + \mathrm{i}) + a \\
&= \frac{1}{2}\left(b - a - \sqrt{3} + 2a\right) + \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\sqrt{3}(b - a) + 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(b + a - \sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\sqrt{3}(b - a) + 1\right)
\end{aligned}$$

Pour que le point C appartienne à l'axe $\left(O; \vec{v}\right)$, il faut et il suffit que la partie réelle de l'affixe de$C$ soit nulle, donc:

$$\frac{1}{2}\left(b + a - \sqrt{3}\right) = 0 \iff b = \sqrt{3} - a$$

b. Dans ce cas, l'affixe du point C est, en fonction de a :

$$\frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\sqrt{3}(\sqrt{3}-a-a)+1\right)=\left(2-\sqrt{3}a\right)\mathrm{i}.$$

2. Dans cette question, on pose $a=\sqrt{3}$ et $b=0$. On considère les points C d'affixe $c=-\mathrm{i}$ et D d'affixe $d=2+\sqrt{3}-2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

a. D'après l'étude précédente, le triangle ABC est équilatéral car $b=\sqrt{3}-a=0$ et $c=\left(2-\sqrt{3}a\right)\mathrm{i}=-\mathrm{i}$

b.

$$\begin{aligned}\frac{d-a}{c-a} &= \frac{2+\sqrt{3}-2\mathrm{i}\sqrt{3}-\sqrt{3}}{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}\\ &= \frac{2(1-\mathrm{i}\sqrt{3})}{-\sqrt{3}-\mathrm{i}}\\ &= \frac{2(1-\mathrm{i}\sqrt{3})(-\sqrt{3}+\mathrm{i})}{3+1}\\ &= 2\mathrm{i}\end{aligned}$$

Donc $\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\arg\left(\frac{d-a}{c-a}\right)=\arg(2\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}$. Ainsi le triangle ACD est rectangle en A.

c. Comme E est l'image de D dans la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, alors son affixe est :

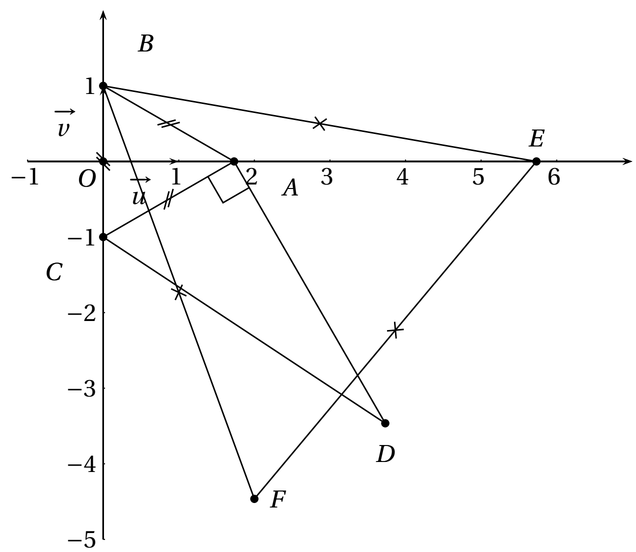
$$\begin{aligned}e &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(d-a)+a\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}-2\mathrm{i}\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(2-2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\\ &= \left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\\ &= 1+3+\sqrt{3}=4+\sqrt{3}\end{aligned}$$

d. Comme F est l'image de D dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, alors son affixe est:

$$f=2+\sqrt{3}-2\mathrm{i}\sqrt{3}+(-\mathrm{i}-\sqrt{3})=2-\mathrm{i}\left(1+2\sqrt{3}\right)$$

e. Le triangle BEF est équilatéral, car:

$$\begin{aligned}BE^2 &= |\mathrm{i}-(4+\sqrt{3})|^2=1+\left(4+\sqrt{3}\right)^2=1+16+8\sqrt{3}+3=20+8\sqrt{3}\\ BF^2 &= |\mathrm{i}-\left(2-\mathrm{i}\left(1+2\sqrt{3}\right)\right)|^2=|-2+2\mathrm{i}\left(1+\sqrt{3}\right)|^2\\ &= 4+4\left(1+\sqrt{3}\right)^2=20+8\sqrt{3}\\ EF^2 &= |4+\sqrt{3}-2+\mathrm{i}\left(1+2\sqrt{3}\right)|^2=|2+\sqrt{3}+\mathrm{i}\left(1+2\sqrt{3}\right)|^2\\ &= \left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1+2\sqrt{3}\right)^2=20+8\sqrt{3}\end{aligned}$$



EXERCICE 4
Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. $A \neq D$ et $I \neq E$: il existe donc une unique similitude directe s transformant A en D et I en E.

2. Le rapport de la similitude s est $\dfrac{IE}{AD}$.

   Prenons $OA = 1$.

   - Dans le triangle EDI rectangle en D, le théorème de Pythagore s'écrit : $IE^2 = 1^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4} \Longrightarrow IE = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
   - Dans le triangle rectangle ABD, le théorème de Pythagore s'écrit : $AD^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Longrightarrow AD = \sqrt{5}$.

   Finalement $\dfrac{IE}{AD} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}$.

   s est donc une similitude directe de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$

3. Soit $B' = s(B)$. On a $\left(\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{IB'}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$, donc B' appartient à la perpendiculaire à la droite (AB) contenant I, donc appartient à la demi-droite $[ID)$.

   De même en prenant les deux points D et B et leurs images par s :

   $\left(\overrightarrow{DB}\,,\ \overrightarrow{EB'}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$, donc B' appartient à la la perpendiculaire à (BD) contenant E.

   Finalement B'appartient aux droites (BD) et (DE) et donc $B' = D$.

4. Par hypothèse C est le milieu de $[BD]$, donc son image par s est le milieu du segment image $[DE]$.

5. **a.** Soit Ω le centre de s ; on a par définition $\left(\overrightarrow{\Omega A}\,,\,\overrightarrow{\Omega I}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, donc le triangle $AI\Omega$ rectangle en Ω est inscrit dans le cercle de diamètre $[AI]$;
De même $\left(\overrightarrow{\Omega D}\,,\,\overrightarrow{\Omega E}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, donc le triangle $DE\Omega$ rectangle en Ω est inscrit dans le cercle de diamètre $[DE]$.

b. J est le milieu de $[OC]$, C le milieu de $[BD]$ et (OC) est parallèle à (AB), donc J est aussi le milieu de $[AD]$. Son imageJ' est le milieu du segment image $[IE]$ et $\left(\overrightarrow{\Omega J}\,,\,\overrightarrow{\Omega J'}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, or $\left(\overrightarrow{HJ}\,,\,\overrightarrow{HJ'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. Conclusion : H n'est pas le centre de la similitude s.

c. D'après la question a. Ω appartient aux cercles de diamètres $[AI]$ et $[DE]$; ce n'est pas le point H, c'est donc l'autre point commun aux deux cercles.

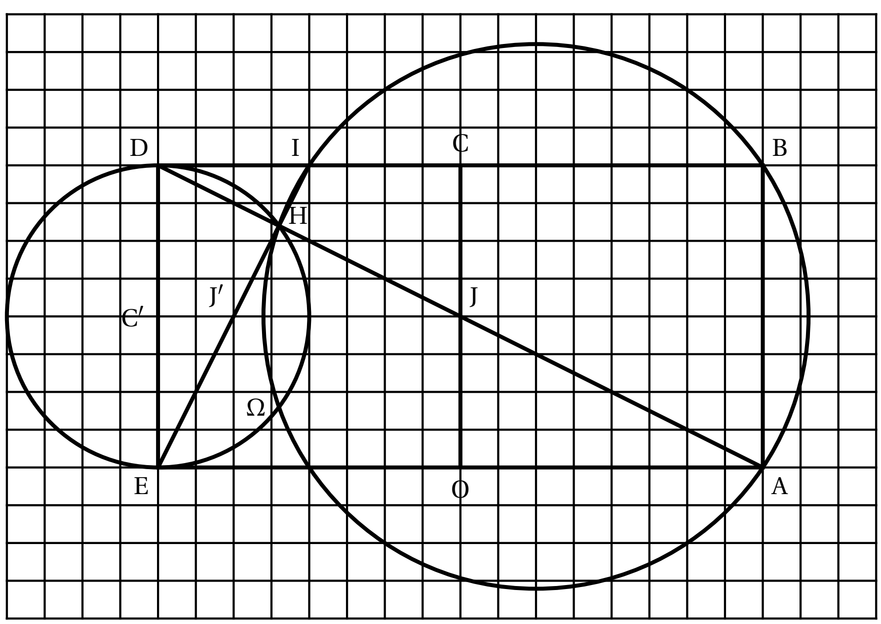
d. On sait que l'écriture d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ avec $(a\,;\,b) \in \mathbb{C}^2$. En prenant les points A et D et leurs images I et E, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\dfrac{1}{2} & = & a + b \\ -1 & = & a' - 1 + \mathrm{i}) + b \end{array}\right. \Longrightarrow a(2 - \mathrm{i}) = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i} \iff a = \dfrac{\frac{1}{2} + \mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}}{2}$$

Puis par différence $b = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i} - \dfrac{\mathrm{i}}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2}$.
L'écriture complexe de s est donc :

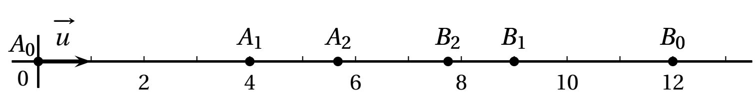
$$z' = \frac{1}{2}\mathrm{i}z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

h



EXERCICE 5
Partie A

1. Figure associée :



2. On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n. Or A_{n+1}, d'abscisse a_{n+1}, est le barycentre des points pondérés $(A_n, 2)$, avec A_n d'abscisse a_n, et $(B_n, 1)$, , avec B_n d'abscisse b_n, donc, grâce à la formule
$$x_{A_{n+1}} = \frac{2 \times x_{A_n} + 1 \times x_{B_n}}{2+1}$$
, on a:
$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$$
Et de même que $b_{n+1} = \frac{a_n+3b_n}{4}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$. Alors :

   a.
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= b_{n+1} - a_{n+1} \\ &= \frac{a_n + 3b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{3} \\ &= \frac{3a_n + 9b_n - 8a_n - 4b_n}{12} \\ &= \frac{5b_n - 5a_n}{12} \\ &= \frac{5}{12}(b_n - a_n) \\ &= \frac{5}{12}u_n \end{aligned}$$
   Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{5}{12}$.

   b. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{5}{12}\right)^n \times u_0 = \left(\frac{5}{12}\right)^n \times (12-0) = 12\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

   c. Comme $-1 < \frac{5}{12} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^n = 0$, ainsi (u_n) converge vers 0.
   Donc lorsque n tend vers $+\infty$, les points A_n et B_n sont très proches.

2. **a.** $a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n+b_n}{3} - a_n = \frac{2a_n+b_n-3a_n}{3} = \frac{b_n-a_n}{3} = \frac{u_n}{3} > 0$. Ainsi la suite (a_n) est croissante.

   b. $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n+3b_n}{4} - b_n = \frac{a_n+3b_n-4b_n}{3} = \frac{a_n-b_n}{4} = -\frac{u_n}{4} < 0$. Ainsi la suite (b_n) est décroissante.

3. D'après les trois points démontrés ((a_n) croissante, (b_n) décroissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$), alors les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et donc convergent vers le même réel ℓ.

Partie C

1. $v_{n+1} = 3a_{n+1} + 4b_{n+1} = 3\frac{2a_n+b_n}{3} + 4\frac{a_n+3b_n}{4} = 2a_n + b_n + a_n + 3b_n = 3a_n + 4b_n = v_{n+1} = v_n$.
   Ainsi la suite (v_n) est constante égale à $v_0 = 3a_0 + 4b_0 = 48$.

2. Comme on a pour tout entier naturel n, $3a_n + 4b_n = 48$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell$, alors :
$$3\ell + 4\ell = 48 \iff 7\ell = 48.$$
   Donc la limite des suites (a_n) et (b_n) est $\dfrac{48}{7}$.