∽ Correction du baccalauréat S Antilles–Guyane ∾ septembre 2003

EXERCICE 1 **5 points**

1. **a.** Le fait de considérer la présence des 12 groupes inscrits peut être assimilée à une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = \dfrac{7}{8}$ (probabilité d'être présent).

   La probabilité d'avoir 12 groupes présents est donc égale à $\dbinom{12}{0}\left(\dfrac{7}{8}\right)^{12} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{12} \approx 0,201$.
   Cette probabilité est donc comprise entre 0,20 et 0,21.

   b. On a à nouveau une loi binomiale de paramètres $n = 30$ (jours), et de probabilité qu'il soient tous présents égale à $\left(\dfrac{7}{8}\right)^{12}$.
   $X = 30$ est l'évènement : « les 12 groupes étaient présents les 30 jours ». Sa probabilité est égale à :
   $\dbinom{30}{30}\left[\left(\dfrac{7}{8}\right)^{12}\right]^{30} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{360} \approx 1,3 \times 10^{-21} \approx 0$ (à 0,01 près).
   $X = 0$ est l'évènement : « il n'y a jamais eu les 12 groupes présents les 30 jours » ou encore « les 30 jours, il y a eu au moins un groupe absent ».Sa probabilité est égale à :
   $\dbinom{30}{0}\left[\left(\dfrac{7}{8}\right)^{12}\right]^{0} \times \left[1 - \left(\dfrac{7}{8}\right)^{12}\right]^{3}0 = \left[1 - \left(\dfrac{7}{8}\right)^{12}\right]^{3}0 \approx 0,001\,1 \approx 0$ (à 0,01 près).

   L'espérance mathématique de X est égale $X = n \times p = 30 \times \left(\dfrac{7}{8}\right)^{12} \approx 6,042 \approx 6,04$ (à 0,01 près).

   c. $S = 11$ signifie qu'il y a ce jour 11 groupes présents, donc 1 groupe absent.
   La probabilité de cet évènement est égale à :
   $\dbinom{12}{11}\left(\dfrac{7}{8}\right)^{11} \times \left(\dfrac{1}{8}\right)^{1} = 12 \times \left(\dfrac{7^{11}}{8^{12}}\right) \approx 0,345\,2 \approx 0,35$ (à 0,01 près).
   La loi suivie par S est la même que celle suivie par le nombre de groupes présents, donc de paramètres $n = 12$ et de probabilité $\dfrac{7}{8}$. On sait que

   $$p(S = k) = \binom{12}{k}\left(\frac{7}{8}\right)^{k} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{12-k}$$

   L'espérance mathématique est donc égale à $12 \times \dfrac{7}{8} = 10,5$.
   Sur une longue période, l'association récoltera en moyenne 10,5 Crédits.

2. **a.** On a toujours une loi binomiale de paramètres $n = 13$ et de probabilité $p = \dfrac{7}{8}$. La probazbilité P_{13} que les treize groupes soient présents est

   $$\mathrm{P}_{13} = \binom{13}{13}\left(\frac{7}{8}\right)^{13} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{0} = \left(\frac{7}{8}\right)^{13} \approx 0,176 \approx 0,18.$$

   b. La variable R vaut 0 s'il y a au moins 1 groupe absent et 2 s'il y a 13 groupes présents. Dans ce cas :
   $P(R = 2) = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{13} \approx 0,18$ comme vu ci-dessus et par conséquent $P(R = 0) = 1 - P(R = 2) \approx 0,82$. On a donc la loi :

r	0	2
$P(R=r)$	0,82	0,18

On en déduit l'espérance mathématique de R :
$\text{E}(R) = 0\times 0,82+2\times 0,18 = 0,36$.
Sur une longue période le coût de l'activité de substitution est environ de 0,36 Crédit.

c. De $k=0$ à $k=12$, l'association reçoit k Crédits. Par contre s'il y a 13 groupes, l'association ne reçoit que $11(13-2)$ Crédits.
L'espérance du gain G est donc :
$\text{E}(G) = \sum_{k=0}^{12} k\times P(G=k)+11P_{13} = \sum_{k=0}^{12} k\times P(G=k)+13P_{13}-2P_{13} = \sum_{k=0}^{12} k\times \binom{13}{k}\left(\frac{7}{8}\right)^k ()^{13-k}+13\times\left(\frac{7}{8}\right)^{13}-2\times\left(\frac{7}{8}\right)^{13} = \sum_{k=0}^{13} k\times\binom{13}{k}\left(\frac{7}{8}\right)^k ()^{13-k}-2P_{13}$.
Le calcul donne $\text{E}(G)\approx 11,02$ Crédits

d. On constate que cette espérance est supérieure à celle (10,5) obtenue avec 12 groupes.
Conclusion : la décision du dirigeant est rentable pour l'association.

EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

1. a. $\overrightarrow{\text{IA}}+\overrightarrow{\text{IB}}+\overrightarrow{\text{I}M} = \overrightarrow{\text{I}D} \iff \overrightarrow{\text{AI}}+\overrightarrow{\text{I}D} = \overrightarrow{\text{IB}}+\overrightarrow{\text{I}M}$. En utilisant l'égalité de Chasles : $\overrightarrow{\text{A}D}\cdot\overrightarrow{\text{B}M} = \left(\overrightarrow{\text{AI}}+\overrightarrow{\text{ID}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\text{BI}}+\overrightarrow{\text{I}M}\right) = \left(\overrightarrow{\text{IB}}+\overrightarrow{\text{I}M}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\text{BI}}+\overrightarrow{\text{I}M}\right) = \left(\overrightarrow{\text{I}M}+\overrightarrow{\text{BI}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\text{I}M}-\overrightarrow{\text{BI}}\right) = \left\|\overrightarrow{\text{I}M}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BI}\right\|^2 = R^2-R^2=0$.
Il en résulte que les droites (AD) et (BM) sont perpendiculaires.
De même $\overrightarrow{\text{B}D}\cdot\overrightarrow{\text{A}M} = \left(\overrightarrow{\text{BI}}+\overrightarrow{\text{I}D}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\text{AI}}+\overrightarrow{\text{I}M}\right) = \left(\overrightarrow{\text{IA}}+\overrightarrow{\text{I}M}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\text{AI}}+\overrightarrow{\text{I}M}\right) = 0$
(car $\overrightarrow{\text{IA}}+\overrightarrow{\text{IB}}+\overrightarrow{\text{I}M} = \overrightarrow{\text{I}D} \iff \overrightarrow{\text{BI}}+\overrightarrow{\text{I}D} = \overrightarrow{\text{IA}}+\overrightarrow{\text{I}M}$).
Donc les droites (BD) et (AM) sont perpendiculaires.
Dans le triangle ABM, (AD) et (BD) sont deux hauteurs, donc D est l'orthocentre de ce triangle.

b. Par définition de l'isobarycentre :
$\overrightarrow{G\text{A}}+\overrightarrow{G}+\overrightarrow{G} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{G\text{I}}+\overrightarrow{\text{IA}}+\overrightarrow{G\text{I}}+\overrightarrow{\text{IB}}+\overrightarrow{G\text{I}}+\overrightarrow{\text{IM}} = \overrightarrow{0} \iff$
$3\overrightarrow{G\text{I}}+\overrightarrow{\text{I}D} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{\text{I}D} = 3\overrightarrow{\text{I}G}$.
Cette égalité peut aussi s'écrire : $\overrightarrow{\text{I}G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{I}D}$ ce qui signifie que le point G appartient à la droite (ID) et a pour abscisse $\frac{1}{3}$ pour le repère (I,D).

2. a. Points invariants : $M=M' \iff z=\frac{1}{3}z+2+\frac{2}{3}\text{i} \iff 2z=6+2\text{i} \iff z = 3+\text{i}$. Il existe donc un point unique Ω d'affixe $\omega = 3+\text{i}$ invariant par f.

Calculons $Z-\omega = \frac{1}{3}z+2+\frac{2}{3}\text{i}-3-\text{i} = \frac{1}{3}z-1-\frac{1}{3}\text{i} = \frac{1}{3}(z-3-\text{i}) = \frac{1}{3}[z-(3-\text{i})]$.
Donc $Z-\omega = \frac{1}{3}(z-\omega)$, ce qui traduit que M' d'affixe Z est l'image de M d'affixe z dans l'homothétie f de centre Ω et de rapport $\frac{1}{3}$.

b. Par définition l'isobarycentre des points A, B et M a pour affixe $\frac{1}{3}(z_\text{A}+z_\text{B}+z_M) = \frac{2+4+2\text{i}+z}{3} = \frac{1}{3}z+2+\frac{2}{3}\text{i} = z_{f(M)}$.

c. D'après la question 2. a. l'image du cercle de centre I et de rayon 2 est un cercle homothétique de ce cercle dans l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{1}{3}$.

d. D'après la question 1. b. l'ensemble décrit par le point D est le cercle homothétique du cercle de centre I et de rayon 2, dans l'homothétie de centre I et de rapport 3.

EXERCICE 2 — 4 points

Enseignement de spécialité

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0.$$

1. a. $\dfrac{14}{39}$ est solution de l'équation signifie $78\left(\dfrac{14}{39}\right)^3 + u\left(\dfrac{14}{39}\right)^2 + v\left(\dfrac{14}{39}\right) - 14 = 0 \iff 2\times\dfrac{14^3}{39^2} + u\dfrac{14^2}{39^2} + v\dfrac{14}{39} - 14 = 0 \iff 2\dfrac{14^2}{39^2} + u\dfrac{14}{39^2} + v\dfrac{1}{39} - 1 = 0 \iff$ $2\times 14^2 + 14u + 39v - 39^2 = 0 \iff 14u + 39v = 39^2 - 2\times 14^2 \iff 14u + 39v = 1\,129$.

b. $39 = 3\times 13$ et $14 = 2\times 7$ sont premiers entre eux. On sait qu'il existe un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers vérifiant $14x + 39y = 1$.

L'algorithme d'Euclide donne : $\begin{array}{lcl} 39 & = & 2\times 14 + 11\\ 14 & = & 1\times 11 + 3\\ 11 & = & 3\times 3 + 2\\ 3 & = & 1\times 2 + 1\end{array}$

soit en remontant

$$\begin{array}{lcl} 3-2 & = & 1\\ 3-(11-3\times 3) & = & 1 \iff 4\times 3 - 11 = 1\\ 14-(1\times 11) & = & 3 \Rightarrow 4[14-11]-11 = 1 \iff 4\times 14 - 5\times 11 = 1\\ 39 - 2\times 14 & = & 11 \Rightarrow 4\times 14 - 5(39-2\times 14) = 1 \iff -5\times 39 + 14\times 14 = 1\end{array}$$

On a donc trouvé $x = 14,\ y = -5$.

On a $-25\times 14 + 9\times 39 = -350 + 351 = 1$. Donc le couple $(-25\,;\,9)$ est aussi solution de l'équation.

c. $-25\times 14 + 9\times 39 = 1 \Rightarrow -25\times 1\,129\times 14 + 9\times 1\,129\times 39 = 1\,129 \iff$ $14\times -28\,225 + 39\times 10\,161 = 1\,129$.

Le couple $\left(u_{0\,;\,v_0}\right) = (-28\,225\,;\,10\,161)$ est donc solution de l'équation $14u + 39v = 1\,129$.

On a :

$14u + 39v = 1\,129$

$14\times -28\,225 + 39\times 10\,161 = 1\,129$

d'où par différence :

$14(u + 28\,225) + 39(v - 10\,161) = 0 \iff 14(u + 28\,225) = 39(10\,161 - v).\quad (1)$

Donc 14 divisant $39(10\,161 - v)$ et étant premier avec 39, divise $(10\,161 - v)$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10\,161 - v = 14k \iff$ $v = 10\,161 - 14k$, puis en reportant dans l'égalité (1) :

$14(u + 28\,225) = 39(14k) \iff u + 28\,225 = 39k \iff u = 39k - 28\,225$.

L'ensemble des couples solutions est donc

$S = \{(39k - 28\,225\,;\,10\,161 - 14k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

d. On a $39k - 28\,225 = 0 \iff k = \dfrac{28\,225}{39} \approx 724$.

Vérification : $39\times 724 - 28\,225 = 11$ et $39\times 723 - 28\,225 = -28$.

On en déduit $v = 10\,161 - 14\times 724 = 25$.

Le couple solution avec le plus petit premier terme naturel est $(11\,;\,25)$.

2. **a.** $78 = 2\times 3\times 13$ et $14 = 2\times 7$ On a $\mathcal{D}_{78} = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 13 ; 26 ; 39 ; 78\}$ et $\mathcal{D}_{14} = \{1 ; 2 ; 7 ; 14\}$.

b. $\dfrac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) signifie

$78\dfrac{P^3}{Q^3} + u\dfrac{P^2}{Q^2} + v\dfrac{P}{Q} - 14 = 0 \iff 78P^3 + uP^2Q + vPQ^2 - 14Q^3 = 0 \iff$ $P\left(78P^2 + uPQ + vQ^2\right) = 14Q^3$.

Comme P divise $14Q^3$ et est premier avec Q, il divise 14.

De même on peut écrire $14Q^3 - vPQ^2 - uP^2Q = 78P^3 \iff$ $Q\left(14Q^2 - vPQ - uP^2\right) = 78P^3$.

Q divise $78P^3$, est premier avec P donc avec P^3 : il divise 78.

c. On a donc $P \in \mathcal{D}_{14}$ et aussi leurs opposés et $Q \in \mathcal{D}_{78}$ et leurs opposés.

En théorie il y a $4\times 8 = 32$ possibilités avec des termes positifs, mais comme P et Q doivent être premiers entre eux, si P est pair Q ne peut l'être et inversement. Il faut donc enlever $2\times 4 = 8$ couples. Il faut également enlever les 4 couples avec $Q = 1$ qui donnent une solution entière.

Il reste donc 20 couples positifs et autant de négatifs, soit 40 couples possibles.

Les 20 rationnels positifs non entiers possibles sont :

$\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{6} ; \dfrac{1}{13} ; \dfrac{1}{26} ; \dfrac{1}{39} ; \dfrac{1}{78} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{13} ; \dfrac{2}{39} ; \dfrac{7}{2} ; \dfrac{7}{3} ; \dfrac{7}{6} ; \dfrac{7}{13} ; \dfrac{7}{26} ; \dfrac{7}{39} ; \dfrac{7}{78} ;$ $\dfrac{14}{3} ; \dfrac{14}{13} ; \dfrac{14}{39}$.

PROBLÈME **10 points**

Partie A - étude préliminaire d'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (2-x)\mathrm{e}^x - 1$

1. • En $-\infty$: $f(x) = 2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1$.

En posant $y = -x$, $-x\mathrm{e}^x = y\mathrm{e}^{-y} = \dfrac{y}{\mathrm{e}^y}$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} -x\mathrm{e}^x = \lim_{y\to+\infty} \dfrac{y}{\mathrm{e}^y} = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} = -1$.

• En $+\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, donc par produit de limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$.

2. φ est une somme de produits de fonctions continuez et dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\varphi'(x) = -\mathrm{e}^+(2-x)\mathrm{e}^x = (1-x)\mathrm{e}^x$ qui est du signe de $(1-x)$ car quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$.

On a donc $\varphi'(x) > 0 \iff x < 1$, $\varphi'(x) < 0 \iff x > 1$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	-	
φ	-1	$\nearrow$	$\mathrm{e}-1$	$\searrow$	$-\infty$

On a $\varphi(-2) = 4\mathrm{e}^{-2} - 1 \approx -0,45$.
$\varphi(0) = 2-1 = 1$, $\varphi(1) = \mathrm{e}-1$ et enfin $\varphi(2) = 0-1 = -1$

3. On a $\varphi(-2) < 0$ et $\varphi(0) > 0$; la fonction φ étant continue et croissante sur $]-2\,;\,0[$ elle s'annule une seule fois en $\alpha \in]-2\,;\,0[$.
   De la même façon elle s'annule en $\beta \in [1\,;\,2]$.
4. La calculatrice donne $-1,15 < \alpha < -1,14$ et $1,84 < \beta < 1,85$.
5. On sait que $\varphi(\alpha) = 0 \iff (2-\alpha)\mathrm{e}^{\alpha} - 1 = 0 \iff (2-\alpha)\mathrm{e}^{\alpha} = 1 \iff \mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{2-\alpha}$ (car $\alpha \neq 2$).

Partie B - Étude d'une fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}$ et calcul intégral

1. Soit e la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $e(x) = \mathrm{e}^x - x$. Cette fonction est dérivable et pour tout x, $e'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ qui s'annule pour $x = 0$.
   Donc sur $\mathbb{R}_-$, $e'(x) < 0$, donc e est décroissante de $+\infty$ à 1, et sur $\mathbb{R}_+$, $e'(x) > 0$, donc e est croissante de 1 à $+\infty$.
   Le minimum de la fonction est égal à 1, donc pour tout x réel $\mathrm{e}^x - x \geqslant 1 > 0$.
   Conclusion : f est définie pour tout réel.
2. On a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - 1 = -1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - x = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
   On peut écrire en factorisant puis en simplifiant par le facteur non nul e^x :
   $f(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{1-x\mathrm{e}^{-x}}$.
   On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1-\mathrm{e}^{-x} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - x\mathrm{e}^{-x} = 1$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
3. f quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sut $\mathbb{R}$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - x\right) - \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(\mathrm{e}^x - x\right)}{\left(\mathrm{e}^x - x\right)^2} =$
   $\dfrac{\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^x - x\right)^2} = \dfrac{2\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x - 1}{\left(\mathrm{e}^x - x\right)^2} = \dfrac{\varphi(x)}{\left(\mathrm{e}^x - x\right)^2}$.
   Le signe de $f'(x)$ est celui de $\varphi(x)$ vu à la partie A.
   On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

4. On a $f(\alpha) = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha} - 1}{\mathrm{e}^{\alpha} - \alpha}$.
   On a vu dans la partie précédente que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{2-\alpha}$, donc en remplaçant les exponentielles :
   $f(\alpha) = \dfrac{\dfrac{1}{2-\alpha} - 1}{\dfrac{1}{2-\alpha} - \alpha} = \dfrac{1-2+\alpha}{1-2\alpha+\alpha^2} = \dfrac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2} = \dfrac{1}{\alpha-1}$.
5. On a vu que si $e(x) = \mathrm{e}^x - x$, $e'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, donc $f(x) = \dfrac{e'(x)}{e(x)}$.
   Une primitive de f est donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \ln|e(x)| = \ln e(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x - x\right)$ (car on a vu que $e(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$).

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x}\,dx.$$

On a donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_0^1 = \left[\ln\left(e^x - x\right)\right]_0^1 = \ln(e-1) - \ln 1 = (e-1) \approx$ $0{,}5413 \approx 0,54$. (au centième près)

Partie C - Étude de deux suites

1. La fonction est définie si $\dfrac{1}{2-x} > 0 \iff 2-x > 0 \iff x < 2$.
   On a donc $D_g =]-\infty\,;\,2[$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2-x}$ est croissante sur $]-\infty\,;\,2[$ et la fonction ln est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, donc par composition, la fonction g est croissante sur $]-\infty\,;\,2[$.
   De même les deux fonctions étant continues, la fonction g est continue sur $]-\infty\,;\,2[$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2-x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.
   Comme $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{1}{2-x} = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to 2} g(x) = +\infty$.
2. On admet que que l'image par g de l'intervalle $I = [-2\,;\,0]$ est incluse dans cet intervalle.
   a. $u_1 = g(u_0) = g(-2) = \ln\left[\dfrac{1}{2-(-2)}\right] = \ln\left[\dfrac{1}{4}\right] = -2\ln 2 \in [-2\,;\,0]$.
   - Initialisation : on a donc $u_0 \in [-2\,;\,0]$. La relation est vraie au rang 0.
   - Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \in [-2\,;\,0]$.

   On a donc $-2 \leqslant u_n \leqslant 0$. Par croissance de la fonction g, on a donc :
   $g(-2) \leqslant g(u_n) \leqslant g(0) \iff \ln\left[\dfrac{1}{4}\right] \leqslant g(u_n) \leqslant \ln\left[\dfrac{1}{2}\right] \iff -2\ln 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant$ $-\ln 2 \Rightarrow -2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0$.
   On a donc démontré que si pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-2\,;\,0]$, alors $u_{n+1} \in [-2\,;\,0]$.
   La relation est vraie au rang 0, et si elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors elle est vraie pour $n+1$. On a donc démontré par le principe de la récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-2\,;\,0]$.
   ⋆ Croissance de la suite :
   - Initialisation : $u_0 \leqslant u_1$: vraie
   - Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \leqslant u_{n+1}$; par croissance de la fonction g,$g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) \iff u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

   La relation est vraie au rang 0, et si elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors elle est vraie pour $n+1$. On a donc démontré par le principe de la récurrence que la suite (u_n) est croissante.

   b. $v_0 = 0 \Rightarrow u_1 = g(v_0) = g(0) = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.
   On a donc $-2 \leqslant u_1 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 0$.
   Démonstration par récurrence :
   - Initialisation : on vient d'initialiser la propriété.
   - Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait

   $-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0$. Par application de la fonction g qui est croissante sur $[-1\,;\,0]$, on obtient :

   $$g(-2) \leqslant g(u_n) \leqslant g(v_n) \leqslant g(v_{n-1}) \leqslant g(0)$$

   soit $-2\ln 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant -\ln 2 \Rightarrow -2 \leqslant u_{n+1} \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 0$.
   La relation est vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang 0, et si elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, alors elle est vraie pour $n+1$. On a donc démontré par le principe de la récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\;-2 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_{n-1} \leqslant 0$.
La récurrence est établie.

3. **a.** par :
m est une somme de fonctions dérivables sur $[0\,;+\infty[$; elle est donc dérivable et sur $[0\,;+\infty[$, $\;m'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x} > 0$ puisque c'est un quotient de termes positifs.
Donc m est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $m(0) = 0 - \ln 1 = 0$.
Conclusion : la fonction est positive, soit $x - \ln(1+x) \geqslant 0 \iff \ln(1+x) \leqslant x$.

b. Pour tout entier n, $\;v_{n+1} - u_{n+1} = g(v_n) - g(u_n) = \ln\left(\dfrac{1}{2-v_n}\right) - \ln\left(\dfrac{1}{2-u_n}\right) =$
$-\ln(2-v_n) + \ln(2-u_n) = \ln\dfrac{2-u_n}{2-v_n} = \ln\dfrac{2-v_n+v_n-u_n}{2-v_n} = \ln\left[1+\dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}\right]$.
On a montré que tout entier n, $\;u_n \leqslant v_n$, donc $v_n - u_n \geqslant 0$ et $-2 \leqslant v_n \leqslant 0 \iff 0 \leqslant -v_n \leqslant 2 \iff 2 \leqslant 2 - v_n \leqslant 4$, donc $2 - v_n \geqslant 0$.
Il en résulte que $\dfrac{v_n-u_n}{2-v_n} \geqslant 0$.
Or on a montré que pour $x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0$, $\;\ln(1+x) \leqslant x$, en appliquant ce résultat à $x = \dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}$, on en déduit que $\ln\left[1+\dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}\right] \leqslant \dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}$.
Donc finalement

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

On sait que :
$-2 \leqslant v_n \leqslant 0 \iff 0 \leqslant -v_n \leqslant 2 \iff$
$2 \leqslant 2 - v_n \leqslant 4 \iff \dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{2-v_n} \leqslant \dfrac{1}{2} \iff$
$\dfrac{u_n-v_n}{2} \leqslant \dfrac{v_n-u_n}{2-v_n} \leqslant \dfrac{u_n-v_n}{2} \iff \ln\left[1+\dfrac{v_n-u_n}{2-v_n}\right] \leqslant \dfrac{v_n-u_n}{2-v_n} \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$.
Montrons par récurrence que pour tout naturel n, $\;v_n - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

- Initialisation : pour $n = 0$, on a $v_0 - u_0 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 (v_0 - u_0)$ qui est vraie.

- Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ on ait $v_n - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$.

On a montré que $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$ soit en utilisant l'hypothèse de récurrence :
$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$ soit
$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} (v_0 - u_0)$.
La relation est vraie au rang $n+1$.
La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n, elle l'est au rang $n+1$.
On a donc démontré par le principe de récurrence que pour tout naturel n, $\;v_n - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$. On a vu que pour tout n, $\;v_n - u_n \geqslant 0$, donc finalement

$$0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$$

Comme $v_0 - u_0 \geqslant 0$ et que $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est une suite positive, la suite $(v_n - u_n)$ est une suite à termes positifs.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, le théorème des « gendarmes » montre que

$$\lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

Finalement la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et la limite de leurs différences est nulle : elles sont donc adjacentes, sont convergentes et ont donc la même limite.

4. La calculatrice donne $u_{10} \approx -1,14622$, donc à 10^{-4} près

$$-1,1463 \leqslant u_{10} \leqslant -1,1462.$$

De même on obtient $v_{10} \approx -1,14618$, donc à 10^{-4} près

$$-1,1462 \leqslant v_{10} \leqslant -1,1461.$$