Corrigé du baccalauréat S Antilles–Guyane septembre 2004

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

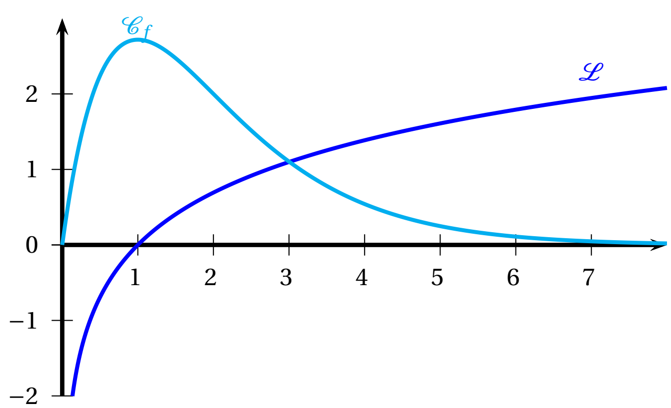
1. On a $f(x) = \text{e}^2 \times \dfrac{x}{\text{e}^x}$; f est donc le quotient de deux fonctions dérivables (la seconde ne s'annulant pas) : elle est donc dérivable sur $[0~;~+\infty[$.
$f'(x) = \text{e}^{-x+2} - x\text{e}^{-x+2} = (1-x)\text{e}^{-x+2}$ qui est du signe de $1-x$ car $\text{e}^{-x+2} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. D'où le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

Limites aux bornes : $f(x) = \text{e}^2 \times \dfrac{x}{\text{e}^x}$.

On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^x}{x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\text{e}^x} = 0$. Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de plus l'infini.
D'autre part $f(0) = 0 \times \text{e}^2 = 0$ et $f(1) = \text{e}^1 = \text{e}$.

2. a. Sur la calculatrice l'examen des deux courbes permet de conjecturer à l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = \ln x$ sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$.



b. Si $g(x) = \ln x - f(x)$ différence de deux fonctions dérivables sur $[1~;~+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $g'(x) = \dfrac{1}{x} - (1-x)\text{e}^{-x+2}$. Or d'après la question **1.**, $f'(x) = (1-x)\text{e}^{-x+2} \leqslant 0$ sur $[1~;~+\infty[$, donc $-(1-x)\text{e}^{-x+2} \geqslant 0$ et comme $\dfrac{1}{x} > 0$, $g'(x) > 0$ sur $[1~;~+\infty[$.
La fonction g continue est donc croissante sur $[1~;~+\infty[$.
De plus $g(1) = -f(1) = -\text{e} < 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
Il existe donc un réel unique $\alpha > 1$ tel que $g(\alpha) = 0 \iff \ln\alpha = f(\alpha)$.

c. La calculatrice permet d'appréhender α au millième : $\alpha \approx 3{,}005$.

Partie B

1. On intègre par parties avec :
$\begin{cases} u(x) = x^2 & v'(x) = \mathrm{e}^{-2x} \\ u'(x) = 2x & v(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$
Les fonctions u et v sont dérivables et les fonctions u' et v' sont continues sur l'intervalle d'intégration.
Donc $\mathrm{I} = \left[-x^2 \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 + \displaystyle\int_0^3 x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.
On intègre cette dernière intégrale à nouveau par parties :
$\begin{cases} u(x) = x & v'(x) = \mathrm{e}^{-2x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{cases}$,
les fonctions u et v étant dérivables et les fonctions u' et v' étant continues sur l'intervalle d'intégration.
On obtient finalement $\mathrm{I} = \left[-x^2 \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 - \left[x\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 - \dfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 = -\dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-6} - \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-6} - \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-6} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{25}{4}\mathrm{e}^{-6}$.

2. a. On a $\mathcal{V} = \displaystyle\int_0^3 \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \pi x^2\mathrm{e}^{-2x+4}\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^4\int_0^3 x^2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^4 \times \mathrm{I}$ (en unités de volume).

b. L'unité de volume est égale à $4^3 = 64\left(\mathrm{cm}^3\right)$. D'où
$\mathcal{V} = \pi\mathrm{e}^4\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{25}{4}\mathrm{e}^{-6}\right) \times 64 = 16\pi\mathrm{e}^4 - 400\pi\mathrm{e}^{-2} \approx 2\,574\ \left(\mathrm{cm}^3\right)$.

EXERCICE 2 — 5 points

1. a. ABC′ est un triangle équilatéral. [BC′] est l'image de [BC] dans la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ s'écrit en notation complexe : $c' - b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-b)$.

b. On obtient de même avec les deux autres triangles équilatéraux :
$b' - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-a)$ et $a' - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b-c)$.
En ajoutant membre à membre les trois égalités précédentes :
$c' - b + b' - a + a' - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-b+c-a+b-c) \iff a'+b'+c'-(a+b+c) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times 0 \iff a'+b'+c'-(a+b+c) = 0 \iff a'+b'+c' = a+b+c$.

2. Les points P, Q et R sont les centres de gravité ou les isobarycentres des sommets respectifs des trois triangles équilatéraux; donc :
$p = \dfrac{b+c+a'}{3}$, $q = \dfrac{c+a+b'}{3}$, $r = \dfrac{a+b+c'}{3}$ soit en sommant : $p+q+r = \dfrac{b+c+a'+c+a+b'+a+b+c'}{3} = \dfrac{b+c+c+a+a+b+a+b+c}{3}$
$= \dfrac{3(a+b+c)}{3} = a+b+c$.

3. On a donc $a+b+c = a'+b'+c' = p+q+r \iff \dfrac{a+b+c}{3} = \dfrac{a'+b'+c'}{3} = \dfrac{p+q+q}{3}$. Cette double égalité se traduit géométriquement par : les triangles ABC, A′B′C′, PQR ont le même centre de gravité.

4. D'après la question **2.** $3p = b+c+a'$ et $3q = c+a+b'$ soit par différence $3(q-p) = c+a+b'-b-c-a' = (b'-c)+(c-a')+(a-b)$. De même $3(r-p) = (a-c)+(b-a')+(c'-b)$.

5. A est l'image de C′ dans la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, se traduit par $a - c = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(b'-c)$. De même B est l'image de C dans la rotation de centre A′, soit $b' - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(c-a')$ et d'après la question **1. a.** $c' - b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(a-b)$.

6. On a admis à la question **4.** que $3(r-p)=(a-c)+(b-a')+(c'-b)$. Soit d'après la question précédente : $3(r-p)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left[(b'-c)+(c-a')+(a-b)\right]=3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(q-p)$, ce qui signifie que R est l'image du point Q dans la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{3}$, soit PQR est un triangle équilatéral.

EXERCICE 3 (OBLIGATOIRE) **5 points**

1. a. On a $z_{\mathrm{E}'}=\dfrac{-1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}=(-1)\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ (écriture exponentielle).

$z_{\mathrm{E}'}=-\dfrac{1}{2}-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (écriture algébrique).

b. $M(z)\in\mathscr{C}_1\iff z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Donc l'image M'de M a une affixe $z'=\dfrac{-1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}=(-1)\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$. Le point M'est donc le symétrique de M autour de O et l'image de $\mathscr{C}_1$ est donc $\mathscr{C}_1$.

2. a. $z_{\mathrm{K}'}=\dfrac{-1}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}=(-1)\times\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\mathrm{i}\dfrac{1}{4}$.

b. $M(z)\in\mathscr{C}_2\iff z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ (avec $0\leqslant\theta<2\pi$). Donc son image M' a une image d'affixe $z'=\dfrac{-1}{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}=(-1)\times\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\times\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+\theta)}$. Ceci signifie que M' appartient au cercle $\mathscr{C}_2'$ de centre O et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

3. a. Avec $z=1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on a $z'=\dfrac{-1}{\overline{z}}$, donc $z'+1=\dfrac{-1}{\overline{z}}+1=\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$.

En prenant les modules, on obtient :

- $\left|z'+1\right|=\left|\dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}\right|=\dfrac{\left|\overline{z}-1\right|}{\left|\overline{z}\right|}=\dfrac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|}{\left|\overline{z}\right|}=\dfrac{1}{\left|\overline{z}\right|}$. D'autre part
- $z'=\dfrac{-1}{\overline{z}}$ entraîne que $|z'|=\left|\dfrac{-1}{\overline{z}}\right|=\dfrac{|-1|}{\left|\overline{z}\right|}=\dfrac{1}{\left|\overline{z}\right|}$ soit la même expression qu'au dessus.

On a donc bien $\left|z'+1\right|=\left|z'\right|$.

b. Si un point$M$ a pour affixe $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, son image$M'$ a une affixe z' telle que d'après le résultat du **a.** $\left|z'+1\right|=\left|z'\right|\iff\left|z'-(-1)\right|=\left|z'-0\right|$ qui se traduit géométriquement par : $M'\mathrm{B}=M'\mathrm{O}$ qui signifie que le point M' appartient à la médiatrice de [OB].

EXERCICE 3 (SPÉCIALITÉ) **5 points**

1. Réponse : vraie.

$\left\{\begin{array}{lcl}4002&=&2004\times1+1998\\2004&=&1998\times1+6\\1998&=&6\times336+0\end{array}\right.$. Le dernier reste non nul est bien 6

2. Réponse : vraie.

$2^{pq}-1=(2^p)^q-1=\left(2^q\right)^p-1$ et ce nombre est divisible par 2^p-1 et par 2^q-1 (car a^m-1 est divisible par $a-1$).

3. Réponse : fausse.

Contre-exemple : $2^6-1=63$ est divisible par 9.

4. Réponse : fausse.

$24\times(70k-144)+36(99-24k)=108+816k\neq9$.

En fait on trouve que $24\times(-16)+35\times11=1$ et par suite que les solutions sont tous les couples $(35k-144\ ;\ 99-24k)$ où $k\in\mathbb{Z}$.

5. Réponse : fausse.
Soit M un point du plan ; son image M_1 par f vérifie $\overrightarrow{\mathrm{A}M_1} = 3\overrightarrow{\mathrm{A}M}$. Puis l'image M' de M_1 par g vérifie $\overrightarrow{\mathrm{B}M'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{B}M_1}$. Or $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{B}M'} = \overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{\mathrm{B}M_1} = \overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{A}M_1}\right) = \overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{\mathrm{BA}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \times \mathbf{3}\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

6. Réponse : vraie.
Les points invariants vérifient $z = \mathrm{i}\overline{z} + (1-\mathrm{i})$ soit avec $z = x + \mathrm{i}y$, $x + \mathrm{i}y = \mathrm{i}(x - \mathrm{i}y) + (1-\mathrm{i}) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & y+1 \\ y & = & x-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x-y-1 & = & 0 \\ x-y-1 & = & 0 \end{array}\right.$ qui est bien l'équation d'une droite.

EXERCICE 4 — 5 points

1. Avec l'évènement M : « être malade » et T l'évènement : « être positif au test », en dressant un arbre de probabilités pondérées, on obtient :
$p(T = p(M \cap T) + p\left(M \cap \overline{T}\right) = 0,003 \times 0,5 + 0,03 \times 0,997.$
On a donc $p_T(M) = \dfrac{p(M \cap T)}{p(T)} = \dfrac{0,003 \times 0,5}{0,003 \times 0,5 + 0,03 \times 0,997} \approx 0,0468 \approx 0,05.$
(réponse 4)

2. La boule subit une épreuve de Bernouilli avec $n = 3$ et $p = 0,3$ (ou $0,7$).
On a $p\left(R_1\right) = 0,3^3$; $p\left(R_2\right) = 3 \times 0,3^2 \times 0,7$ $p\left(R_3\right) = 3 \times 0,7^2 \times 0,3$ $p\left(R_4\right) = 0,7^3$.
On obtient puisque les issues sont disjointes : $p_1 = p\left(R_1\right) + p\left(R_3\right) = 0,468$ et $p_2 = p\left(R_2\right) + p\left(R_4\right) = 0,532$. (réponse 3)

3. On calcule :
$d^2 = (0,093 - 0,1)^2 + (0,116 - 0,1)^2 + (0,102 - 0,1)^2 + (0,102 - 0,1)^2 + (0,094 - 0,1)^2 + (0,094 - 0,1)^2 + 0,097 - 0,1)^2 + (0,095 - 0,1)^2 + 0,101 - 0,1)^2 + (0,106 - 0,1)^2 = 0,000\,456.$
On a $0,000\,456 < 0,001\,45$ soit $d^2 < d_9$, donc il accepte cette hypothèse avec un risque de 10 % de la rejeter.