

## ∞ Corrigé du baccalauréat S Antilles-Guyane ∞

**11 septembre 2014**

### EXERCICE 1

**6 points**

#### Commun à tous les candidats

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

À l'issue des tests, il est noté que

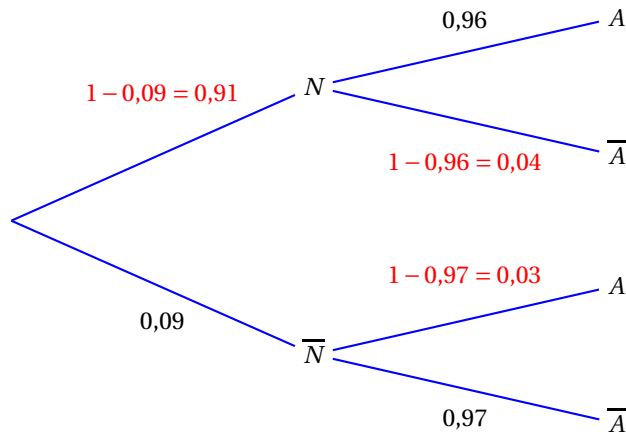
- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- $N$  l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- $A$  l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

#### Partie A

1. On construit un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment :



2. La probabilité qu'une peluche soit acceptée est  $P(A)$ .

D'après la formule des probabilités totales :  $P(A) = P(N \cap A) + P(\bar{N} \cap A)$ .

$$\left. \begin{array}{l} P(N \cap A) = P(N) \times P_N(A) = 0,91 \times 0,96 = 0,8736 \\ P(\bar{N} \cap A) = P(\bar{N}) \times P_{\bar{N}}(A) = 0,09 \times 0,03 = 0,0027 \end{array} \right\} \Rightarrow P(A) = 0,8736 + 0,0027 = 0,8763$$

3. La probabilité qu'une peluche qui a été acceptée soit aux normes est  $P_A(N)$  :

$$P_A(N) = \frac{P(N \cap A)}{P(A)} = \frac{0,8736}{0,8763} \approx 0,9969$$

#### Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur. On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée  $D$ , suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

1. On sait que  $P(D \leq 4) = 0,5$ .

Si  $D$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , alors  $P(D \leq a) = \int_{-\infty}^a \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda a}$ .

$$\text{Donc } P(D \leq 4) = 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-4\lambda} = 0,5 \Leftrightarrow 0,5 = e^{-4\lambda} \Leftrightarrow \ln 0,5 = -4\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln 0,5}{4}$$

2. On prendra ici  $\lambda = 0,1733$ .

Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.

La probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires est la probabilité conditionnelle  $P_{D \geq 3}(D \geq 3 + 5)$ .

On sait que la loi exponentielle est une loi à « durée de vie sans vieillissement » donc que, pour tous réels strictement positifs  $s$  et  $t$  :  $P_{D \geq t}(D \geq s + t) = P(D \geq s)$ .

Donc  $P_{D \geq 3}(D \geq 3 + 5) = P(D \geq 5) = 1 - P(D \leq 5) = 1 - (1 - e^{-5\lambda}) = e^{-5 \times 0,1733} \approx 0,4204$

### Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté  $J$ , où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ . Il apparaît que  $\mu = 358$  jours.

1. D'après le cours, la variable aléatoire  $X = \frac{J - 358}{\sigma}$  suit la loi normale centrée réduite, c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1.

2. On sait que  $P(J \leq 385) = 0,975$ .

$$J \leq 385 \iff J - 358 \leq 27 \iff \frac{J - 358}{\sigma} \leq \frac{27}{\sigma} \text{ car } \sigma \text{ est un nombre strictement positif.}$$

On cherche donc  $\sigma$  pour que  $P\left(X \leq \frac{27}{\sigma}\right) \leq 0,975$  sachant que  $X$  suit la loi normale centrée réduite.

La calculatrice donne  $\frac{27}{\sigma} \approx 1,96$  ce qui équivaut à  $\sigma \approx 13,77$ . On prendra donc  $\sigma = 14$ .

### EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = xe^{-x}$ .

1. D'après le cours,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ; donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  ce qui équivaut à  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ .

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

2. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $[0; +\infty[$  et :

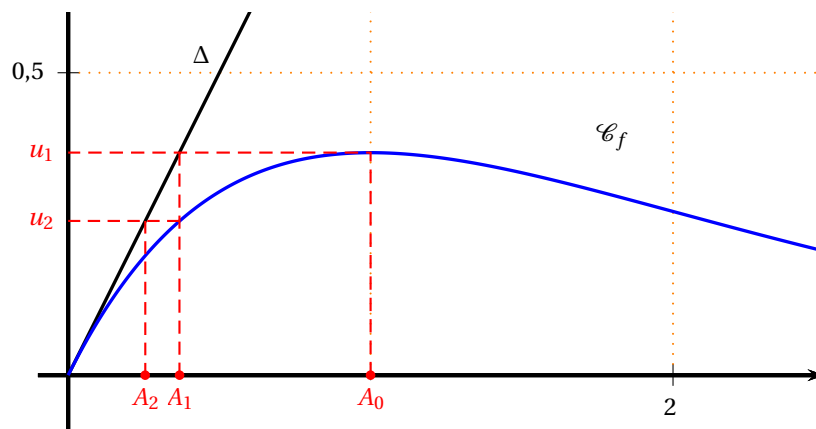
$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + x(-1 \times e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$$

Pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} > 0$  donc  $f'(x)$  est du signe de  $1 - x$ ;  $f(0) = 0$  et  $f(1) = e^{-1} \approx 0,37$

D'où le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		+	-
$f(x)$	0	$e^{-1}$	0

On donne la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  dans un repère du plan ainsi que la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$ .



### Partie B

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

- On place sur le graphique, en utilisant la courbe  $\mathcal{C}_f$  et la droite  $\Delta$ , les points  $A_0$ ,  $A_1$  et  $A_2$  d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives  $u_0$ ,  $u_1$  et  $u_2$ .
- Soit  $\mathcal{P}_n$  la propriété  $u_n > 0$ .
  - $u_0 = 1 > 0$  donc la propriété est vraie au rang 0.
  - On suppose la propriété vraie au rang  $p \geq 0$ , c'est-à-dire  $u_p > 0$ .  
Pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} > 0$  donc pour tout réel  $x > 0$ ,  $x e^{-x} > 0$  donc  $f(x) > 0$ .  
Or  $u_{p+1} = f(u_p)$  et  $u_p > 0$  (hypothèse de récurrence); donc  $f(u_p) > 0$  et donc  $u_{p+1} > 0$ .  
La propriété est vraie au rang  $p + 1$ .
  - La propriété est vérifiée au rang 0, et elle est héréditaire pour tout  $p \geq 0$ ; elle est donc vraie pour tout  $n \geq 0$ .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .

- Pour tout réel  $x > 0$  :
 
$$\begin{aligned}
 -x < 0 &\iff e^{-x} < e^0 && \text{croissance de la fonction exponentielle} \\
 &\iff e^{-x} < 1 \\
 &\iff x e^{-x} < x && \text{car } x > 0 \\
 &\iff f(x) < x
 \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) < x$ ; or, pour tout  $n$ ,  $u_n > 0$  donc  $f(u_n) < u_n$  ce qui veut dire que  $u_{n+1} < u_n$ . La suite  $(u_n)$  est donc décroissante.
- La suite  $(u_n)$  est décroissante, minorée par 0, donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente.
  - On admet que la limite de la suite  $(u_n)$  est solution de l'équation  $x e^{-x} = x$ .  
On résout l'équation  $x e^{-x} = x$  :  

$$\begin{aligned}
 x e^{-x} = x &\iff x(e^{-x} - 1) = 0 && \iff x = 0 \text{ ou } e^{-x} - 1 = 0 \\
 &\iff x = 0 \text{ ou } e^{-x} = 1 && \iff x = 0 \text{ ou } -x = 0
 \end{aligned}$$

Donc la limite de la suite  $(u_n)$  est égale à 0.

### Partie C

On considère la suite  $(S_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

L'algorithme suivant donne  $S_{100}$  :

Déclaration des variables :	S et $u$ sont des nombres réels $k$ est un nombre entier
Initialisation :	$u$ prend la valeur 1 S prend la valeur $u$
Traitement :	Pour $k$ variant de 1 à 100 $u$ prend la valeur $u \times e^{-u}$ S prend la valeur $S + u$
	Fin Pour
	Afficher S

**EXERCICE 3****3 points****Commun à tous les candidats**

Soit  $(E_1)$  l'équation :  $e^x - x^n = 0$  où  $x$  est un réel strictement positif et  $n$  un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
 1. \quad e^x - x^n = 0 &\iff e^x = x^n \\
 &\iff \ln(e^x) = \ln(x^n) \\
 &\iff x = n \ln(x) \\
 &\iff \frac{x}{n} = \ln(x) \\
 &\iff \ln(x) - \frac{x}{n} = 0
 \end{aligned}$$

Donc les équations  $(E_1)$  et  $(E_2)$  sont équivalentes.

2. L'équation  $(E_1)$  admet deux solutions si et seulement si l'équation  $(E_2)$  admet deux solutions.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = ]0; +\infty[$  par  $f(x) = \ln(x) - \frac{x}{n}$ ; résoudre l'équation  $(E_2)$  revient donc à résoudre l'équation  $f(x) = 0$ .

Cherchons les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son ensemble de définition :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{n} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par somme} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \end{array}$$

$f(x) = \ln(x) - \frac{x}{n}$  peut s'écrire  $x \left( \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{n} \right)$  pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{par produit} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{n} \right) = -\infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{n} = \frac{n-x}{nx}$ .

$f'(x)$  s'annule et change de signe pour  $x = n$  et  $f(n) = \ln(n) - \frac{n}{n} = \ln(n) - 1$ .

D'où le tableau de variation de la fonction  $f$  :

$x$	0	$n$	$+\infty$
$n-x$		+	-
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$\ln(n) - 1$	$-\infty$

D'après ce tableau de variation, l'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions dans  $]0; +\infty[$  si et seulement si le maximum de la fonction  $f$  est strictement positif, c'est-à-dire quand  $\ln(n) - 1 > 0$  :  
 $\ln(n) - 1 > 0 \iff \ln(n) > 1 \iff n > e \iff n \geq 3$

Donc on peut dire que l'équation  $(E_1)$  admet deux solutions si et seulement si  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

**EXERCICE 4****5 points****Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère la fonction  $f$  qui à tout nombre complexe  $z$  associe  $f(z) = z^2 + 2z + 9$ .

1.  $f(-1 + i\sqrt{3}) = (-1 + i\sqrt{3})^2 + 2(-1 + i\sqrt{3}) + 9 = 1 - 2i\sqrt{3} - 3 - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 = 5$

2. On résout dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(z) = 5$  :

$$f(z) = 5 \iff z^2 + 2z + 9 = 5 \iff z^2 + 2z + 4 = 0; \Delta = 4 - 16 = -12 = -(2\sqrt{3})^2$$

Donc l'équation admet deux racines complexes conjuguées :  $\frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$  et  $-1 - i\sqrt{3}$

On appelle  $A$  le point d'affixe  $z_A = -1 + i\sqrt{3}$  et  $B$  le point d'affixe  $z_B = -1 - i\sqrt{3}$

$$|z_A| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\text{Soit } \theta_A \text{ un argument de } z_A : \left. \begin{array}{l} \cos \theta_A = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \implies \theta_A = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } z_A = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Les nombres complexes  $z_A$  et  $z_B$  sont conjugués, donc ils ont le même module et des arguments opposés donc  $z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

$|z_A| = 2$  donc le point  $A$  se trouve sur le cercle de centre  $O$  et de rayon 2. De plus la partie réelle de  $A$  vaut  $-1$  donc  $A$  se trouve sur la droite d'équation  $x = -1$ . Idem pour  $B$ .

Voir graphique page ??.

3. Soit  $\lambda$  un nombre réel. On considère l'équation  $f(z) = \lambda$  d'inconnue  $z$ .

$$f(z) = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 = \lambda \iff z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$$

Pour que l'équation  $f(z) = \lambda$  admette deux solutions complexes conjuguées, il faut et il suffit que le discriminant du polynôme  $z^2 + 2z + 9 - \lambda$  soit strictement négatif.

$$\Delta = 4 - 4(9 - \lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32; \Delta < 0 \iff 4\lambda - 32 < 0 \iff \lambda < 8$$

L'ensemble des valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles l'équation  $f(z) = \lambda$  admet deux solutions complexes conjuguées est l'intervalle  $] -\infty; 8[$ .

4. Soit  $(F)$  l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe  $z$  vérifie  $|f(z) - 8| = 3$

$f(z) - 8 = z^2 + 2z + 9 - 8 = z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$ ; donc  $|f(z) - 8| = |(z+1)^2| = |z+1|^2$  car le module d'un carré est égal au carré du module.

$$\text{Donc } |f(z) - 8| = 3 \iff |z+1|^2 = 3 \iff |z+1| = \sqrt{3}$$

Soit  $\Omega$  le point d'affixe  $-1$ , donc de coordonnées  $(-1; 0)$ ; si on appelle  $M$  le point d'affixe  $z$ , alors  $|z+1| = \sqrt{3} \iff |z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$ .

L'ensemble des points  $M$  vérifiant  $|z_M - z_\Omega| = \sqrt{3}$  est le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon  $\sqrt{3}$ .

On trace  $(F)$  sur le graphique (voir page ??).

5. Soit  $z$  un nombre complexe, tel que  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.

$$\begin{aligned} \text{a. } f(z) = z^2 + 2z + 9 &= (x + iy)^2 + 2(x + iy) + 9 = x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy + 9 \\ &= x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y) \end{aligned}$$

- b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe  $z$  est telle que  $f(z)$  soit un nombre réel.

$$f(z) \text{ réel} \iff 2xy + 2y = 0 \iff 2y(x+1) = 0 \iff y = 0 \text{ ou } x = -1$$

Donc (E) est la réunion de deux droites  $D_1$  d'équation  $y = 0$  (l'axe des abscisses) et  $D_2$  d'équation  $x = -1$ .

Le cercle (F) est de centre  $\Omega$  d'affixe  $-1$  et de rayon  $\sqrt{3}$ . Donc les points d'intersection du cercle (F) avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées  $(-1 - \sqrt{3}; 0)$  et  $(-1 + \sqrt{3}; 0)$ .

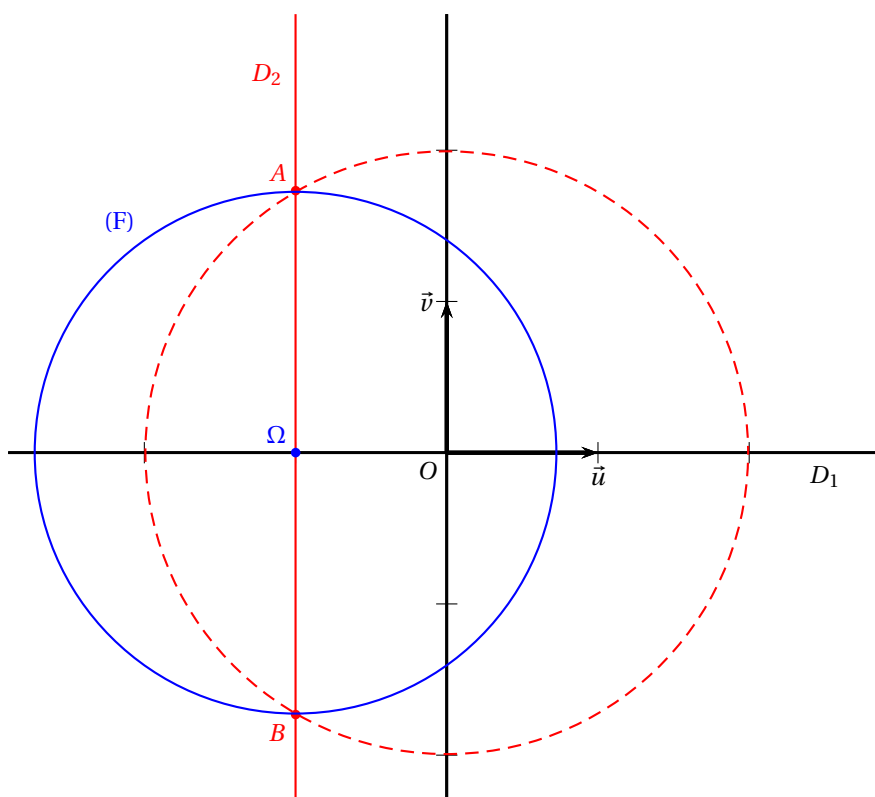
Les points  $A$  et  $B$  ont pour affixes  $z_A$  et  $z_B$  dont les parties réelles sont égales à  $-1$ ; donc  $A$  et  $B$  sont situés sur la droite  $D_2$ .

$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |-1 + i\sqrt{3} + 1| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \text{ donc le point } A \text{ appartient au cercle (F).}$$

$$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |-1 - i\sqrt{3} + 1| = |-i\sqrt{3}| = \sqrt{3} \text{ donc le point } B \text{ appartient au cercle (F).}$$

Les coordonnées des quatre points d'intersection des ensembles (E) et (F) sont :

$$(-1 - \sqrt{3}; 0), (-1 + \sqrt{3}; 0), (-1; \sqrt{3}) \text{ et } (-1; -\sqrt{3})$$



#### EXERCICE 4

5 points

##### Réservé aux candidats ayant suivi la spécialité

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y. D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement. De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit  $n$  un entier naturel. On note  $x_n$  la quantité de fonds détenue par l'agence X, et  $y_n$  la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2014 +  $n$ , exprimées en millions d'euros.

On note  $U_n$  la matrice  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  et on note  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On suppose que le 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y possède 10 millions d'euros.

L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation  $U_{n+1} = AU_n + B$ , où  $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

$$6. U_{n+1} = AU_n + B \iff \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,15y_n + 1 \\ y_{n+1} = 0,2x_n + 0,4y_n + 3 \end{cases}$$

Le coefficient 0,6 de la matrice  $A$  correspond au pourcentage de la somme qui reste d'une année sur l'autre à l'agence X.

Le coefficient 3 de la matrice  $B$  correspond à la somme (en millions d'euros) qui est rajoutée chaque année à l'agence Y.

$$2. \text{ D'après le texte, } U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}$$

La quantité de fonds dans chaque agence en 2015 est donnée par la matrice  $U_1 = AU_0 + B$  :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 \times 50 + 0,15 \times 10 + 1 \\ 0,2 \times 50 + 0,4 \times 10 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32,5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

En 2015, il y a donc 32,5 millions d'euros dans l'agence X et 17 millions d'euros dans l'agence Y.

$$3. \text{ On note } D = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}.$$

$$a. \text{ À la calculatrice, on trouve que } PDQ = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ donc que } PDQ = A.$$

$$b. QP = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Le coefficient situé sur la première ligne et la deuxième colonne de la matrice  $QP$  est donc :

$$0,25 \times 3 + (-0,375) \times 2 = 0,75 - 0,75 = 0$$

Dans la suite, on admettra que  $QP = I$ .

On admettra dans la suite de cet exercice que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $A^n = PD^nQ$ .

Ce résultat est assez facile à démontrer par récurrence en considérant les résultats des questions précédentes; l'hérédité se démontre ainsi :  $A^{p+1} = A \times A^p = PDQ \times PD^pQ = PDD^pQ = PD^{p+1}Q$  car  $Q \times P = I$ .

$$4. \text{ On pose pour tout entier naturel } n, V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}; \text{ donc } U_n = V_n + \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$

$$a. V_{n+1} = U_{n+1} - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} = AU_n + B - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} = A \left( V_n + \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} \\ = AV_n + \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} = AV_n + \begin{pmatrix} 0,6 \times 5 + 0,15 \times \frac{20}{3} + 1 - 5 \\ 0,2 \times 5 + 0,4 \times \frac{20}{3} + 3 - \frac{20}{3} \end{pmatrix} = AV_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = AV_n$$

$$b. V_0 = U_0 - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

On peut dire que, pour tout  $n$ ,  $V_n = A^n \times V_0$ .

On peut considérer ce résultat comme « classique »; en cas de doute, on peut le démontrer par récurrence en se rappelant que  $A^0 = I$ .

$$5. \text{ Soit } n \text{ un entier naturel. On admet que } A^n = \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n & 0,375(-0,3^n + 0,7^n) \\ 0,5(-0,3^n + 0,7^n) & 0,75 \times 0,3^n + 0,25 \times 0,7^n \end{pmatrix}$$

a. D'après les questions précédentes,  $V_n = A^n \times V_0$  donc le coefficient de la première ligne de  $V_n$  est :

$$(0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n) \times 45 + (0,375(-0,3^n + 0,7^n)) \times \frac{10}{3} \\ = 11,25 \times 0,3^n + 33,75 \times 0,7^n + 1,25(-0,3^n + 0,7^n) \\ = 11,25 \times 0,3^n + 33,75 \times 0,7^n - 1,25 \times 0,3^n + 1,25 \times 0,7^n \\ = 10 \times 0,3^n + 35 \times 0,7^n$$

$$b. U_n = V_n + \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix} \text{ et } U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{ Donc } x_n = 10 \times 0,3^n + 35 \times 0,7^n + 5$$

c. La suite  $(0,3^n)$  est une suite géométrique de raison  $0,3$ ; or  $-1 < 0,3 < 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,3^n = 0$ .

Pour la même raison, on peut dire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0,7^n = 0$ .

D'après les théorèmes sur les limites de suites, on peut déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = 5$ .

Cela signifie que la quantité de fonds disponibles dans l'agence X va tendre vers 5 millions d'euros.