Durée : 4 heures

Corrigé du baccalauréat STI2D et STL/SPCL - Antilles Guyane 18 juin 2019

Exercice 1 **4 points**

1. Pour tout réel a strictement positif, $\ln(2a)+\ln(8a) = \ln 2+\ln a+\ln 8+\ln a = 2\ln a+\ln 2+\ln 2^3 = 2\ln a+\ln 2+3\ln 2 = 2\ln a+4\ln 2$, donc $\dfrac{\ln(2a)+\ln(8a)}{2} = \ln a+2\ln 2 = \ln a+\ln 2^2 = \ln a+\ln 4 = \ln(4a)$. Réponse **a.**
2. Réponse **c.**
3. $z = -2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\times 2\times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$ qui a pour conjugué $\overline{z} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}}$. Réponse **c.**
4. Les images des points vérifiant la première condition sont dans les parties 2 et 3.
La deuxième condition interdit d'être dans les parties 1 et 2. Il reste donc la partie 3.
Réponse **c.**

Exercice 2 **7 points**

PARTIE A

1. **a.** Baisser de 5 % revient à multiplier par $1-\dfrac{5}{100} = \dfrac{95}{100} = 0{,}95$.
Donc $c_1 = c_0\times 0{,}95 = 24\times 0{,}95 = 22{,}8$.
b. Chaque année le coût de l'année précédente est multiplié par 0,95 ; on a donc pour tout naturel n, $c_{n+1} = 0{,}95c_n$: la suite (c_n) est géométrique de raison 0,95 et de premier terme $c_0 = 24$.
c. On sait que pour tout naturel n, $c_n = c_0\times 0{,}95^n = c_n = 24\times 0{,}95^n$.
2. $0{,}95^n < 0{,}25$: par croissance de la fonction logarithme népérien : $n\ln 0{,}95 < \ln 0{,}25$ ou (car $\ln 0{,}95$ est négatif et son inverse aussi) $n > \dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}95}$.
Or $\dfrac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}95} \approx 27{,}02$; donc $n \geqslant 28$.
3. Il faut résoudre l'inéquation : $24\times 0{,}95^n < 6$ ou $0{,}95^n < \dfrac{6}{24}$, soit $0{,}95^n < 0{,}25$: on retombe sur l'équation précédente.
Avec ces hypothèses la première année où le coût d'un kilowattheure produit par énergie houlomotrice deviendra inférieur au coût d'un kilowattheure produit par énergie nucléaire sera 2046.
4. **a.** Recopier et compléter l'algorithme suivant afin que la valeur de la variable N en sortie d'algorithme permette de répondre au problème.

```
C ← 24
D ← 6
N ← 2018
Tant que C > D
        C ← C * 0,95
        D ← D + 1
        N ← N + 1
Fin Tant que
```

b. On obtient $c_6 \approx 12{,}76$ et $d_6 = 12$, puis $c_7 \approx 11{,}48$ et $d_7 = 13$. l'algorithme donnera $N = 7$.
Donc en 2025 le coût d'un kilowattheure produit par énergie houlomotrice deviendra inférieur au coût d'un kilowattheure produit par énergie nucléaire.

PARTIE B

On admet que la durée de vie d'un composant électronique d'une installation houlomotrice, exprimée en année, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle dont le paramètre $\lambda = 0{,}04$.

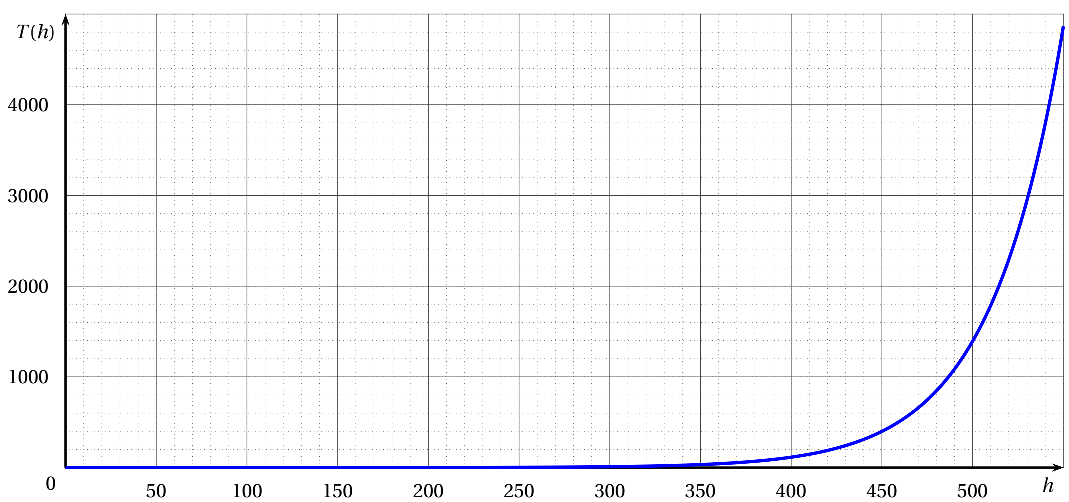
1. La durée de vie moyenne de ce composant électronique est égale à $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}04} = \dfrac{100}{4} = 25$ (ans).
2. **a.** Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, une primitive de la la fonction f est la fonction F définie par $F(x) = -\mathrm{e}^{-0{,}04x}$.
   b. $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^t = [-\mathrm{e}^{-0{,}04x}]_0^t = -\mathrm{e}^{-0{,}04t} + \mathrm{e}^{-0{,}04\times 0} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}04t}$.
3. **a.** On a $P(X > 15) = 1 - P(X \leqslant 15) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}04\times 15}\right) = \mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 0{,}549$ (au millième près).
   b. Le résultat précédent signifie que l'on a un peu plus d'une chance sur deux que le composant ait une durée de vie supérieure à 15 ans.

Exercice 3 **6 points**

PARTIE A – Étude d'un premier satellite

1. On sait que les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions T définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $T(h) = A\mathrm{e}^{\frac{1}{40}h} = A\mathrm{e}^{0{,}025h}$, avec $A \in \mathbf{R}$.
2. $T(800) = 2000 \Rightarrow A\mathrm{e}^{0{,}025\times 800} = 2000$ ou $A\mathrm{e}^{20} = 2000$, soit $A = 2000\mathrm{e}^{-20}$.
   Donc $T(h) = 2000\mathrm{e}^{-20}\mathrm{e}^{0{,}025h} = 2000\mathrm{e}^{0{,}025h-20}$.

PARTIE B – Étude d'un deuxième satellite



1. Graphiquement on voit $T(h) = 1000$ pour h valant un peu moins de 490 km.

2. • Sur le graphique on voit qu'approximativement $T(500) = 1\,400$ soit :
$K \times 0{,}012\,\text{e}^{0{,}025\times(500-150)} = 1\,400$ ou $K \times 0{,}012\,\text{e}^{0{,}025\times 350} = 1\,400$ ou
$K \times 0{,}012\,\text{e}^{8{,}75} = 1\,400$ et enfin $K = \dfrac{1\,400}{0{,}012}\,\text{e}^{-8{,}75} \approx 18{,}49$.
Conclusion : on peut prendre $K \approx 18{,}5$.

PARTIE C – Étude d'un troisième satellite : Hubble

1. On a $T(575) = 0{,}132\,\text{e}^{0{,}025\times(575-150)} = 0{,}132\,\text{e}^{10{,}625} \approx 5\,431{,}91$ (jours).
2. On a $\displaystyle\lim_{h\to+\infty} \text{e}^{0{,}025\times(h-150)} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{h\to+\infty} T(h) = +\infty$.
3. **a.** On a sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $T'(h) = 0{,}025 \times 0{,}0132\,\text{e}^{0{,}025(h-150)} = 0{,}000\,33\,\text{e}^{0{,}025(h-150)}$

   b. On sait que quel que soit le réel h, $\text{e}^{0{,}025(h-150)} > 0$, donc $T'(h) > 0$: la fonction T est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$
4. **a.** $T(h+10) = 0{,}132\,\text{e}^{0{,}025(h+10-150)} = 0{,}132\,\text{e}^{0{,}025(h-150)+0{,}025\times 10} = 0{,}132\,\text{e}^{0{,}025(h-150)} \times \text{e}^{0{,}25} = \text{e}^{0{,}25} \times T(h)$.

   b. Or $\text{e}^{0{,}25} \approx 1{,}284$.
   Une augmentation de hauteur de 10 km conduit à multiplier le temps restant par environ 1,28 soit une augmentation de 28 %.

Exercice 4 — 3 points

PARTIE A

1. On a $P(X > 74{,}97) = P(74{,}97 < X < 75) + P(X > 75)$.
Or $74{,}97 = 75 - 0{,}03 = \mu - \sigma$, donc :
$P(74{,}97 < X < 75{,}03 = P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$ et l'on sait que :
$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}683$, donc
$P(74{,}97 < X < 75) = \dfrac{1}{2}P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx \dfrac{0{,}683}{2} \approx 0{,}341\,5$.
Comme $P(X > 75) = P(X > \mu) = 0{,}5$, on a finalement : $P(X > 74{,}97) \approx 0{,}842$ soit 0,84 au centième près.
2. La calculatrice donne :
$P(74{,}95 < X < 75{,}05) \approx 0{,}904$, soit 0,90 au centième près (9 pièces sur 10).

PARTIE B

On sait que $P(75 - 2\sigma' \leqslant X \leqslant 75 + 2\sigma') \approx 0{,}95$, donc
$75 - 2\sigma' = 74{,}95$ ou $75 - 74{,}95 = 2\sigma' = 0{,}05$, soit finalement : $\sigma' = 0{,}025$

PARTIE C

Avec $p = 0{,}97$ et $n = 300$, on obtient l'intervalle de fluctuation asymptotique suivant à 95 % :
$\left[0{,}97 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}97 \times 0{,}03}{300}}~;~0{,}97 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}97 \times 0{,}03}{300}}\right] \approx [0{,}950~;~0{,}990]$.
La fréquence dans l'échantillon est égale à $\dfrac{300 - 14}{300} = \dfrac{286}{300} \approx 0{,}953$.
Donc comme $0{,}953 \in [0{,}950~;~0{,}990]$, on ne peut pas remettre en cause l'affirmation du responsable de l'atelier; on est cependant très près de la borne inférieure et il serait judicieux de faire un autre contrôle de qualité.