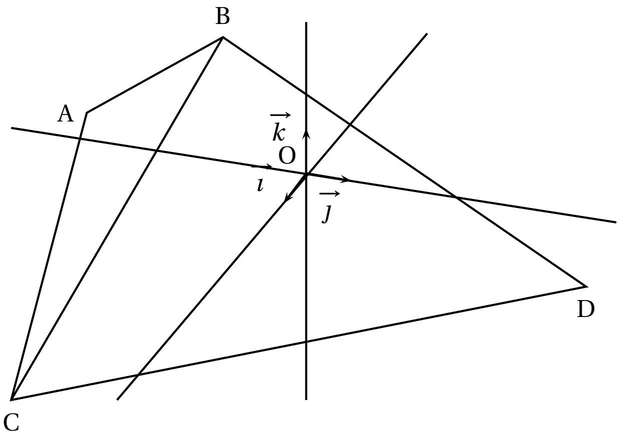
∽ Corrigé du baccalauréat S Asie juin 2003 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun tous les candidats



Partie A

1. On a $\overrightarrow{AB}\,(3\,;\,3\,;\,3)$, $\overrightarrow{AC}\,(3\,;\,0\,;\,-3)$.
   Le repère étant orthonormal on peut calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 9+0-9 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires, le triangle ABC est rectangle en A.

2. Le plan (P) a un vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(1\,;\,1\,;\,1)$; donc $\overrightarrow{n} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; les vecteurs sont colinéaires donc la droite (AB) est orthogonale au plan (P).
   Or $A(3\,;\,-2\,;\,2) \in (P) \iff 3-2+2-3=0$; cette égalité est vraie, donc (P) est orthogonal à la droite (AB) et contient le point A.

3. $\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan P', donc une équation de ce plan est de la forme $3x-3z+d=0$.
   Or $A \in (P') \iff 3\times3-3\times2+d=0 \iff d=-3$.
   Donc $M(x\,;\,y) \in (P') \iff 3x-3z-3=0 \iff x-z-1=0$.

4. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in P\cap P' \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+y+z-3 &=& 0\\ x-z-1 &=& 0\end{array}\right.$
   En posant $z=t$ réel quelconque on obtient le système :
   $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z-3 &=& 0\\ x-z-1 &=& 0\\ z &=& t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+y+t-3 &=& 0\\ x-t-1 &=& 0\\ z &=& t\end{array}\right. \iff$
   $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+t-3 &=& 0\\ x &=& t+1\\ z &=& t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} t+1+y+t-3 &=& 0\\ x &=& t+1\\ z &=& t\end{array}\right. \iff$
   $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& t+1\\ y &=& -2t+2\\ z &=& t\end{array}\right. \iff M(x\,;\,y\,;\,z) \in P\cap P'$

Partie B

1. On a $\overrightarrow{AD}\,(-3\,;\,6\,;\,-3)$
   On a $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = -9+18-9=0$: les vecteurs sont orthogonaux.
   De même $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = -9+0-9=0$: les vecteurs sont orthogonaux.
   Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan ABC, donc la droite (AD) est orthogonale à ce plan.

2. En prenant ABC pour base et D comme sommet, [AD] est hauteur de ce tétraèdre. Le volume V du tétraèdre est donc égal à $\dfrac{\text{aire(ABC)} \times \text{AD}}{3} = \dfrac{\frac{1}{2} \times \text{AB} \times \text{AC} \times \text{AD}}{3}$.
Or $\text{AB}^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 3 \times 9$, donc $\text{AB} = 3\sqrt{3}$;
$\text{AC}^2 = 3^2 + 3^2 = 2 \times 9$, donc $\text{AC} = 3\sqrt{2}$
$\text{AD}^2 = 9 + 36 + 9 = 3\sqrt{6}$.
$V = \dfrac{\frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{3} = \dfrac{27 \times 3}{3} = 27$.
3. On applique le théorème de Pythagore aux triangles rectangles :
ABC rectangle en A donc $\text{AB}^2 + \text{AC}^2 = \text{BD}^2 = 18 + 27 = 45 = 9 \times 5$, donc BC $= 3\sqrt{5}$.
ABD rectangle en A donc $\text{AB}^2 + \text{AD}^2 = \text{BC}^2 = 54 + 27 = 81 \times 5$, donc $\text{BD} = 9$.
ACD rectangle en A donc $\text{AC}^2 + \text{AD}^2 = \text{CD}^2 = 18 + 54 = 72 = 36 \times 2$, donc CD $= 6\sqrt{2}$.
Dans le triangle BCD, on a :
$\text{BC}^2 = \text{BD}^2 + \text{CD}^2 - 2 \times \text{BD} \times \text{CD} \times \cos\widehat{\text{BDC}}$.
Donc $\cos\widehat{\text{BDC}} = \dfrac{\text{BD}^2 + \text{CD}^2 - \text{BC}^2}{2\text{BD} \times \text{CD}} = \dfrac{81 + 72 - 45}{2 \times 9 \times 6\sqrt{2}} = \dfrac{108}{108\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Conclusion : l'angle $\widehat{\text{BDC}}$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$ radian.
4. **a.** L'aire du triangle BDC est égale à $\dfrac{1}{2} \times \text{DB} \times \text{DC} \times \sin\widehat{\text{BDC}} = \dfrac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 9 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27$. (unités d'aire)
b. On considère maintenant le tétraèdre ABDC de base (BDC) et dont la hauteur de mesure h est issue de A.
On a $V = \dfrac{1}{3} \times \text{aire(BDC)} \times h \iff 27 = \dfrac{1}{3} \times 27 \times h \iff h = 3$.

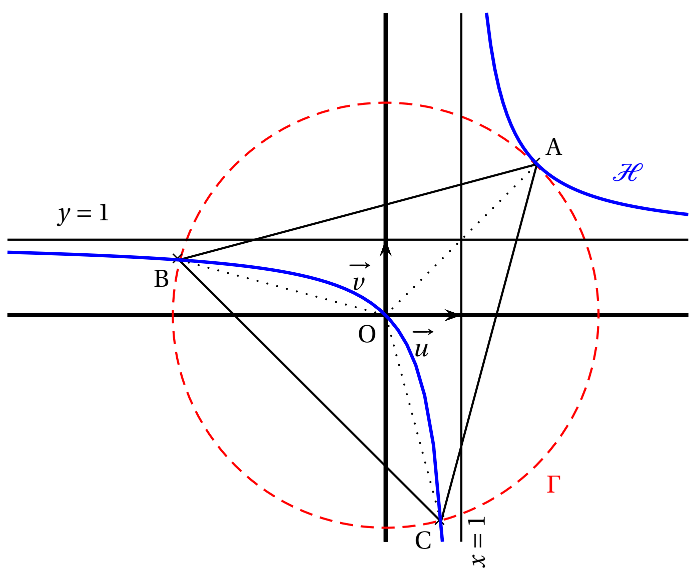
Exercice 2 **4 points**
Enseignement obligatoire

1.
$$z' = z^2 - 2(1 + \mathrm{i})z.$$
a. $z' = z^2 - 2(1+\mathrm{i})z \iff x' + \mathrm{i}y' = (x + \mathrm{i}y)^2 - 2(1 + \mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) \iff x' + \mathrm{i}y' = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy - 2(x - y + \mathrm{i}(x + y)) \iff x' + \mathrm{i}y' = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy - 2x + 2y - 2\mathrm{i}(x + y)$.
En identifiant parties réelles et parties imaginaires, on obtient :
$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x^2 - y^2 - 2x + 2y \\ y' & = & 2xy - 2x - 2y \end{array}\right.$$
b. z' réel implique $y' = 0$, soit $2xy - 2x - 2y = 0 \iff xy - x - y = 0 \iff y(x - 1) = x \iff = \dfrac{x}{x-1}$ si $x \neq 1$.
$\mathscr{H}$ est la représentation graphique (hyperbole) de la fonction h définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$.
2. On a $|a| = |2(1 + \mathrm{i})|$; $|a|^2 = 4 + 4 = 2 \times 4$, donc $|a| = 2\sqrt{2}$. Le point A appartient bien à Γ.
On a bien $2 = \dfrac{2}{2-1}$, donc A appartient à $\mathscr{H}$.
3. **a.** R(A) = B entraîne R ∘ R(A) = R(B) ;
R(C) = A entraîne R ∘ R(C) = R(A) ;
puis R(B) = R ∘ R ∘ R(C).
Mais R ∘ R ∘ R est la composée de trois rotations d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ de même centre O ; c'est la rotation de centre O et d'angle 2π ou 0, soit l'identité.
Finalement R(B) = C.

b. Par la rotation R, C a pour image A qui a pour image B qui a pour image C. Les triangles OCA, OAB et OBC sont isocèles d'angle au sommet $\dfrac{2\pi}{3}$; ils sont isométriques et par conséquent CA = AB = BC : le triangle ABC est équilatéral ; son orthocentre, centre de gravité, etc. est le point O.

c. On vient de voir que OA = OB = OC = 2, donc A, B, C appartiennent à Γ.
Coordonnées du point B :
B(x ; y) est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$, donc $z_{\text{B}} = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}} z_{\text{A}} = \left(-\frac{1}{2} + \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+2\text{i}) = -1-\sqrt{3} + \text{i}(-1+\sqrt{3}$.
Donc B$(-1-\sqrt{3}\ ;\ 1+\sqrt{3})$.
Calculons $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}-1} = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{-2-\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4-3} = -1+\sqrt{3}$ qui est bien l'ordonnée de B.
Conclusion B $\in \mathscr{C}$.
On peut faire le même calcul pour C, mais il est plus rapide de dire que O est le centre de gravité du triangle ABC, donc $z_{\text{A}} + z_{\text{B}} + z_{\text{C}} = z = 0 \iff z_{\text{C}} = -z_{\text{A}} - z_{\text{B}} = -2-2\text{i}+1+\sqrt{3}+\text{i}\left(1-\sqrt{3}\right) = -1+\sqrt{3}+\text{i}\left(-1-\sqrt{3}\right)$.
Donc C$\left(-1+\sqrt{3}\ ;\ -1-\sqrt{3}\right)$.
Calculons $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}-1} = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}} = \ldots = -1-\sqrt{3}$ qui est bien l'ordonnée de C.
Conclusion C $\in \mathscr{C}$.

d. Tracer Γ et placer A, B et C sur le graphique ci-dessous.



EXERCICE 2 **4 points**
Enseignement de spécialité

1. a. On a $3 \times (-3)^3 - 11 \times (-3) + 48 = -81 + 33 + 48 = 0$.
On peut donc factoriser $3n^3 - 11n + 48$ par $n+3$; par identification on trouve que :
$3n^3 - 11n + 48 = (n+3)\left(3n^2 - 9n + 6\right)$

b. Écriture canonique de :
$3n^2 - 9n + 16 = 3\left(n^2 - 3n + \frac{16}{3}\right) =$
$3\left[\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{16}{3}\right] = 3\left[\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{64-27}{12} = 3\left[\left(n - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{37}{12}\right]\right.$.

Le trinôme est une somme de deux carrés, comme c'est un entier c'est un naturel (supérieur à $\frac{37}{12} > \frac{36}{12} = 3$).

2. Soit d un diviseur commun à a et b : il existe k et k' entiers tels que $a = kd$ et $b = k'd$.

On a donc $bc = ck'd$, puis $bc - a = ck'd - kd = d(ck' - k) = ck''$ avec $k'' = ck' - k$ entier. Donc d est un diviseur commun à $bc - a$ et à b.

Ceci est vrai en particulier pour le plus petit diviseur commun à a et b.

Inversement soit d un diviseur commun à $bc - a$ et à b.

Il existe donc deux entiers k et l tels que $bc - a = kd$ et $b = ld$, soit $a = bc - kd = ldc - kd = d(lc - k)$: donc d divise a.

$bc - a$ et et b ont les mêmes diviseurs communs que a et b et en particulier le plus grand.

3. On utilise le résultat précédent avec $a = 3n^3 - 11n$, $b = n+3$ et $c = 3n^2 - 9n + 16$.

$c \in \mathbb{Z}*$; comme $n \geqslant 2$, $n + 3 \geqslant 5 > 0$.

D'autre part $3n^3 - 11n = n\left(3n^2 - 11\right)$; ce nombre est positif si $3n^2 - 11 \geqslant 0 \iff 3n^2 \geqslant 11 \iff n^2 \geqslant \frac{11}{3} \iff n \geqslant \sqrt{\frac{11}{3}} \approx 1,9$, donc finalement il faut $n \geqslant 2$.

On a $bc - a = (n+3)\left(3n^2 - 9n + 16\right) - \left(2n^3 - 11n\right) = 3n^3 - 11n + 48 - 3n^3 + 11n = 48$.

Donc d'après la question précédente le P. G. C. D$\left(3n^3 - 11n\ ;\ n+3\right) =$ P. G. C. D.$(48\ ;\ n+3)$.

4. a. $48 = 1 \times 48 = 2 \times 24 = 3 \times 16 = 4 \times 12 = 6 \times 8$, donc les diviseurs entiers naturels de 48 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 et 48.

b. On a vu que $3n^3 - 11n > 0$ si $n \geqslant 2$.

D'après la question précédente P. G. C. D.$\left(3n^3 - 11n\ ;\ n+3\right) = n+3$ si et seulement si P. G. C. D.$(48\ ;\ n+3)$, c'est-à-dire que $n+3$ divise 48. On retranche 3 de chaque diviseur de la liste ci-dessus plus la solution triviale 0.

Finalement : $n \in \{0\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 9\ ;\ 13\ ;\ 21\ ;\ 45\}$.

PROBLÈME — 11 points

Partie A

$$f(x) = \frac{1 + 2\ln x}{x^2}.$$

1. • Limite en 0 :

$f(x) = (1 + 2\ln x) \times \dfrac{1}{x^2}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 2\ln x = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, d'où par produit $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

• Limite en $+\infty$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, d'où par produit et somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Conclusion : les deux axes sont asymptotes à la courbe représentative de f.

2. f est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables le dénominateur étant non nul et sur cet intervalle :
$f'(x) = \dfrac{2\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1+2\ln x)}{x^4} = \dfrac{2x-2x-4x\ln x}{x^4} = \dfrac{-4\ln x^3}{x}$.
Comme $x^3 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $-4\ln x$.
$-4\ln x > 0 \iff 0 > 4\ln x \iff \ln x < 0 \iff x < 1$.
Donc $f'(x) > 0$, c'est-à-dire que f est croissante sur $]0~;~1]$;
De même $f'(x) < 0$, c'est-à-dire que f est décroissante sur $]1~;~+\infty]$.
Le maximum de f est $f(1) = 1$.D'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3. On résout $f(x) = 0 \iff 1+2\ln x = 0 \iff \ln x = -\frac{1}{2} \iff x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.
$\mathrm{I}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}~;~0\right)$.

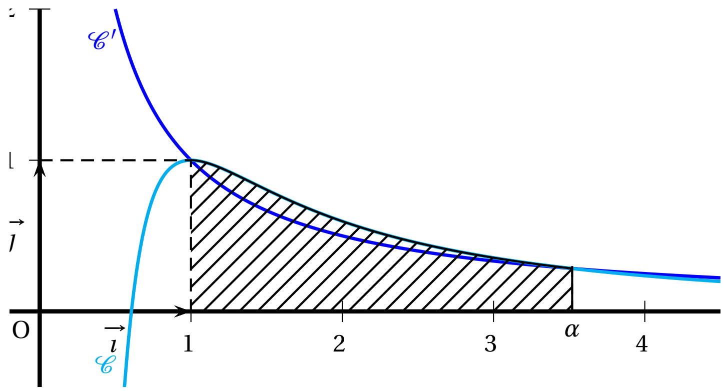
4. a. g est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ comme de somme de fonctions dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = -1 + \dfrac{2}{x}$.
$g'(x) > 0 \iff -1 + \dfrac{2}{x} > 0 \iff \dfrac{2}{x} > 1 \iff 2 > x \quad \text{car} \quad x > 0$.
$g'(x) > 0$, donc g est croissante sur $]0~;~2[$.
De même $g'(x) < 0$, donc g est décroissante sur $]2~;~+\infty[$.
Le maximum de g est $g(2) = 1-2+2\ln 2 = 2\ln 2 - 1 \approx 0,386 > 0$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
En effet $g(x) = 1 - x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$; comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

b. Sur l'intervalle $[0;~2]$, $0 \in [-\infty~;~2\ln 2 - 1[$, comme la fonction est strictement croissante, elle s'annule une seule fois en x_0 tel que $g(x_0) = 0$.
$g(4) = 1-4+2\ln 4 = 2\ln 4 - 3 \approx -0,227$.
Sur l'intervalle $[2;~4]$, comme $0 \in [2\ln 4 - 3~;~2\ln 2 - 1]$, et comme g est strictement décroissante sur cet intervalle, elle s'annule une seule fois en $\alpha \in [2~;~4]$, tel que $g(\alpha) = 1 - \alpha + 2\ln\alpha = 0$.
La calculatrice donne $3,5 < \alpha < 3,6$, puis $3,51 < \alpha < 3,52$.

5. a. $f(x) - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+2\ln x}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1+2\ln x - x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
Les abscisses des points communs à $\mathscr{C}$) et $(\mathscr{C}'$ vérifient $f(x) = \dfrac{1}{x} \iff$
$f(x) - \dfrac{1}{x} = 0 \iff \dfrac{g(x)}{x^2} = 0 \iff g(x) = 0$.
On a vu que cette équation a deux solutions 1 et α.

b. Si $x \geqslant 4$, $g(x) \leqslant 0 \iff f(x) - \dfrac{1}{x} \leqslant 0 \iff f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.
D'autre part si $x \geqslant 4$, $\ln x > 0$, soit $f(x) > 0$.
Finalement : $0 < f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

6.



Partie B

1. **a.** Sur $[1\,;\,\alpha]$, f est positive donc $\mathscr{A}(\alpha)$, est égale à l'intégrale :
$\mathscr{A}(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{1+2\ln x}{x^2}$.

On pose $u(x) = 1+2\ln x$ et $\mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^2}$.

D'où $\mathrm{d}u = \dfrac{2}{x}$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x}$.

Toutes ces fonctions sont continues car dérivables sur l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$, donc on peut intégrer par parties.

$\mathscr{A}(\alpha) = \left[-\dfrac{1+2\ln x}{x^2}\right] + \displaystyle\int_1^{\alpha} \frac{2}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1+2\ln x}{x} - \frac{2}{x}\right]_1^{\alpha} =$
$-\dfrac{1+2\ln\alpha}{\alpha} - \dfrac{2}{\alpha} + 1 + 2 = 3 - \dfrac{3+2\ln\alpha+2\alpha}{\alpha}$.

b. Or on sait que $g(\alpha) = 1-\alpha+2\ln\alpha = 0 \iff 2\ln\alpha = \alpha - 1$.

Donc $\mathscr{A}(\alpha) = 3 - \dfrac{3+\alpha-1}{\alpha} = 3 - \dfrac{2+\alpha}{\alpha} = 2 - \dfrac{2}{\alpha}$.

On sait que $3,51 < \alpha < 3,52 \Rightarrow \dfrac{1}{3,52} < \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{3,51} \Rightarrow \dfrac{2}{3,52} < \dfrac{2}{\alpha} < \dfrac{2}{3,51} \Rightarrow$
$\dfrac{2}{3,51} < \dfrac{2}{\alpha} < \dfrac{2}{3,52} \Rightarrow 2 - \dfrac{2}{3,51} < 2 - \dfrac{2}{\alpha} < 2 - \dfrac{2}{3,52} \Rightarrow 1,430 < 2 - \dfrac{2}{\alpha} < 1,432$.

Finalement $1,43 < 2 - \dfrac{2}{\alpha} < 1,44$.

2. **a.** On a vu que si $x \geqslant 4$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Donc pour $n4$, en intégrant la double inégalité précédente sur l'intervalle $[n\,;\,n+1]$:

$\displaystyle\int_n^{n+1} 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \iff 0 \leqslant I_n \leqslant \ln(n+1) - \ln n \iff$
$0 \leqslant I_n \leqslant \ln\dfrac{n+1}{n}$.

b. Comme $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 0$

Donc par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

c. De façon évidente $S_n = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale.

$S_n = \left[-\dfrac{3+2\ln x}{x}\right]_1^{n+1} = -\dfrac{3+2\ln(n+1)}{n+1} + 3$.

On écrit S_n sous la forme :

$S_n = -\dfrac{3}{n+1} - 2\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)} + 3$.

On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} = 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = 3$.

Partie C

$$f_n(x) = \frac{1+2\ln x}{x^{2n}}.$$

1. f_n quotient de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$f_n'(x) = \dfrac{\frac{2}{x}\times x^{2n} - 2nx^{2n-1}(1+2\ln x)}{x^{4n}} = \dfrac{[2-2n(1+2\ln x)]x^{2n-1}}{x^{4n}} = \dfrac{2(1-n-2n\ln x)}{x^{2n-1}}$.
2. $f_n'(x) = 0 \iff 1-n-2n\ln x = 0 \iff 2n\ln x = 1-n \iff \ln x = \dfrac{1-n}{2n} \iff x = \mathrm{e}^{\frac{1-n}{n}}$.
3. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{2n} = -\frac{1}{2}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.