∽ Baccalauréat S Asie juin 2005 ∾

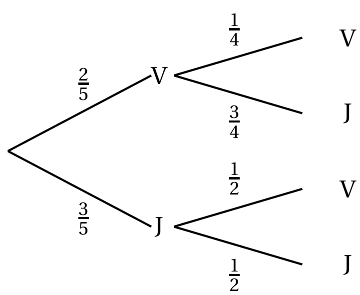
EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. Pour $t = 1$, on obtient bien le triplet (3 ; 1 ; −4) : affirmation C
2. $\overrightarrow{u}\,(2\ ;\ -1\ ;\ -1)$ est un vecteur directeur évident, donc $-\overrightarrow{u}\,(-2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ en est aussi un : affirmation B.
3. $M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \iff 1+2t+4-2t+9+3t = 0 \iff 14 = 3t \iff t = \dfrac{14}{3}$. Il existe donc un seul point commun : affirmation C.
4. Le triplet(1 ; 3 ; 2) vérifie $x+2y-3z-1 = 0$: affirmation B.
5. Un vecteur normal à $\mathcal{Q}_\epsilon$ est le vecteur $\overrightarrow{v_2}\,(4\ ;\ -5\ ;\ 2)$ et $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}_2 = 0$: affirmation B.
6. On a $d(\mathrm{T},\ \mathcal{P}) = \dfrac{|-1-6-6-1|}{\sqrt{1+4+9}} = \dfrac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$: affirmation A

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats



1. **a.** On a en suivant la branche supérieure $p(\mathrm{V}) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$.

   De même $p(\mathrm{J}) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{10}$.

   b. En tournant la roue, la probabilité de gagner 20 € est $\dfrac{90}{360} = \dfrac{1}{4}$, celle de gagner 100 € est donc $\dfrac{1}{8}$; par différence la probabilité d'être remboursé(e) est $\dfrac{5}{8}$.

   On a donc $p_{\mathrm{R}}(\mathrm{V}) = \dfrac{5}{8}$.

   Or $p_{\mathrm{R}}(\mathrm{V}) = \dfrac{p(\mathrm{V}\cap\mathrm{R})}{p(\mathrm{V}} \iff \dfrac{5}{8} = \dfrac{p(\mathrm{V}\cap\mathrm{R})}{\dfrac{1}{10}} \iff p(\mathrm{V}\cap\mathrm{R}) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{5}{80}$.

   c. On a $p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{J}) + p(\mathrm{V}\cap\mathrm{R}) = \dfrac{3}{10} + \dfrac{5}{80} = \dfrac{29}{80}$.

   d. $p(100) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{80}$; $p(20) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{40}$.
2. **a.** X peut prendre les valeurs : $-m$; $100-m$; $20-m$; 0.

   b.

x_i	$-m$	$100-m$	$20-m$	0
$p(X = x_i)$	$\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{1}{80}$	$\dfrac{1}{40}$	$\dfrac{29}{80}$

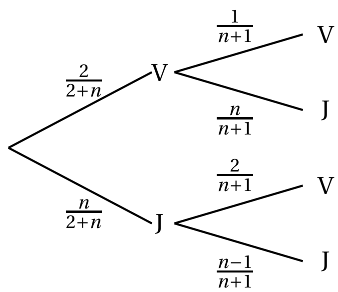
c. On a $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} p_i \times x_i = -\dfrac{6m}{10} + \dfrac{100-m}{80} + \dfrac{20-m}{40} + 0 = \dfrac{140-51m}{80}$.

d. L'organisateur ne perdra pas d'argent si $\mathrm{E}(X) < 0 \iff \dfrac{140-51m}{80} < 0 \iff m > \dfrac{140}{51}$. Donc il faut que m soit au moins fixé à 3 euros.

3. On reconnaît une expérience de Bernoulli avec $p = \dfrac{4}{10}$ et $n = 4$.

La probabilité de ne pas perdre est égale à $\left(\dfrac{4}{10}\right)^4$, donc la probabilité de perdre au moins une fois est $1 - \left(\dfrac{4}{10}\right)^4 = 1 - 0{,}0256 = 0{,}9744$.

4. On obtient un nouvel arbre de probabilités :



On doit avoir $\dfrac{2n}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{2n}{(n+1)(n+2)} \leqslant \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{4n}{(n+1)(n+2)} \leqslant \dfrac{1}{2} \iff n^2 - 5n + 2 \geqslant 0$. Le trinôme $n^2 - 5n + 2$ a pour racines $n_1 = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2} \approx 4,56$ et $n_2 = \dfrac{5-\sqrt{17}}{2} \approx 0,44$.

Il faut donc qu'il y ait plus de 4 boules jaunes.

EXERCICE 3 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

I.

1. On a $(-\mathrm{i})^3 + (-8+\mathrm{i}) \times (-\mathrm{i})^2 + (17-8\mathrm{i}) \times (-\mathrm{i}) = \mathrm{i} + 8 - \mathrm{i} - 17\mathrm{i} - 8 + 17\mathrm{i} = 0 \iff -\mathrm{i}$ est solution de (E).

2. En développant le second membre et en identifiant les coefficients des termes de même degré, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ a\mathrm{i}+b & = & -8+\mathrm{i} \\ b\mathrm{i}+c & = & 17-8\mathrm{i} \\ \mathrm{i}c & = & 17\mathrm{i} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & -8 \\ c & = & 17 \end{array}\right.$$

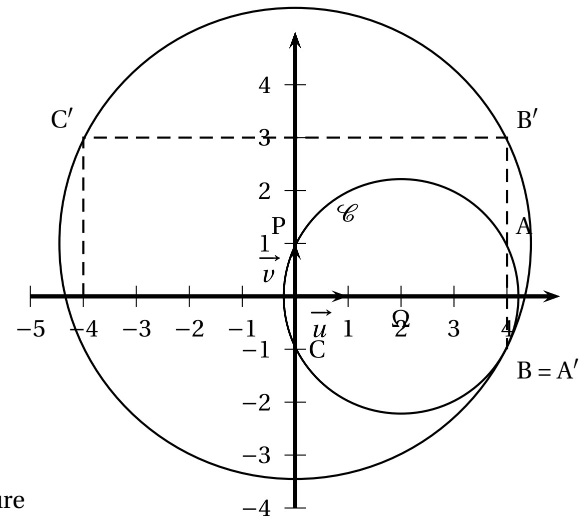
On a donc pour tout complexe z, $z^3+(-8+\mathrm{i})z^2+(17-8\mathrm{i})z+17\mathrm{i} = (z+\mathrm{i})\left(z^2-8z+17\right)$.

3. On a donc (E) $\iff (z+\mathrm{i})\left(z^2-8z+17\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z+\mathrm{i} & = & 0 \\ z^2-8z+17 & = & 0 \end{array}\right.$.

On trouve aussitôt que :

$$\mathrm{S} = \{-\mathrm{i}\ ;\ 4+\mathrm{i}\ ;\ 4-\mathrm{i}\}$$

II.



1. Figure
2. L'écriture complexe de la rotation est :
   $z' - 2 = \mathrm{i}(z-2)$. Donc $z_S - 2 = \mathrm{i}(4 + \mathrm{i} - 2) \iff z_S = 2 + 2\mathrm{i} - 1 = 1 + 2\mathrm{i}$.
3. D'après la question précédente : $\Omega S = \Omega A$.
   A et B sont symétriques autour de $(\mathrm{O}x)$, et $\Omega \in (\mathrm{O}x)$, donc $\Omega A = \Omega B$; enfin B et C ayant la même ordonnée, Ω appartient à la médiatrice de [BC] et $\Omega B = \Omega C$.
   Conclusion B, A, S et C appartiennent à un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω.
   Le rayon est égal à $\Omega C = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.
4. **a.** D'après la définition algébrique $z_{A'} = \dfrac{\mathrm{i}(4+\mathrm{i}) + 10 - 2\mathrm{i}}{4 + \mathrm{i} - 2} = \dfrac{9 + 2\mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}} = \dfrac{(9 + 2\mathrm{i})(2 - \mathrm{i})}{(2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})} = \dfrac{20 - 5\mathrm{i}}{5} = 4 - \mathrm{i} = z_B$.

   $z_{B'} = \dfrac{\mathrm{i}(4-\mathrm{i}) + 10 - 2\mathrm{i}}{4 - \mathrm{i} - 2} = \dfrac{11 + 2\mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}} = \dfrac{(11 + 2\mathrm{i})(2 + \mathrm{i})}{(2 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})} = \dfrac{20 + 15\mathrm{i}}{5} = 4 + 3\mathrm{i}$.

   $z_{C'} = \dfrac{\mathrm{i}(-\mathrm{i}) + 10 - 2\mathrm{i}}{-\mathrm{i} - 2} = \dfrac{11 - 2\mathrm{i}}{-2 - \mathrm{i}} = \dfrac{(11 - 2\mathrm{i})(-2 + \mathrm{i})}{(-2 - \mathrm{i})(-2 + \mathrm{i})} = \dfrac{-20 + 15\mathrm{i}}{5} = -4 + 3\mathrm{i}$.

   Donc $z_{A'} = 4 - \mathrm{i},\ z_{B'} = -4 + 3\mathrm{i},\ z_{C'} = -4 + 3\mathrm{i}$.

   b. $PA' = \left|z_{A'} - z_P\right| = |4 - \mathrm{i} - \mathrm{i}| = |4 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
   de même $PB' = |4 + 3\mathrm{i} - \mathrm{i}| = |4 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
   $PC' = |-4 + 3\mathrm{i} - \mathrm{i}| = |4 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;
   Donc A′, B′ et C′ appartiennent au cercle $\mathscr{S}'$ de centre P et de rayon $2\sqrt{5}$.

   c. On a $z' = \dfrac{\mathrm{i}(z-2) + 10}{z - 2} = \mathrm{i} + \dfrac{10}{z-2} \iff z' - \mathrm{i} = \dfrac{10}{z - 2}$ et en prenant les modules $\left|z' - \mathrm{i}\right| = \dfrac{10}{|z-2|}$. Donc géométriquement $PM' = \dfrac{10}{\Omega M}$.

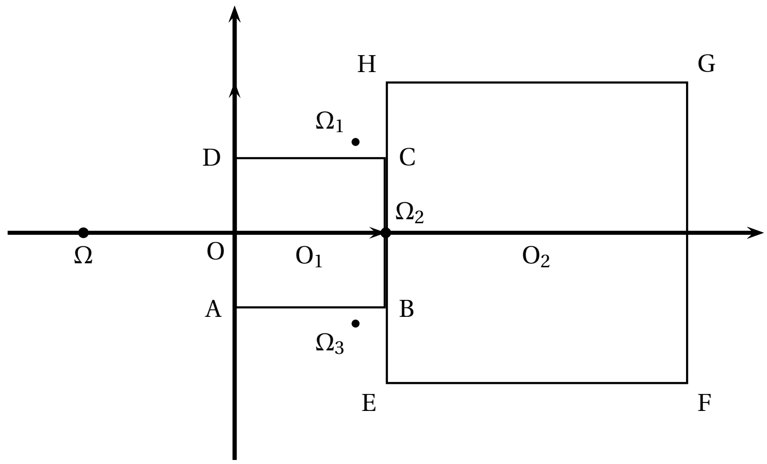
   d. Si $M \in \mathscr{C} \longrightarrow \Omega M = \sqrt{5}$. D'après la question précédente $\left|z' - \mathrm{i}\right| = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

   e. Géométriquement la dernière relation signifie : $PM' = 2\sqrt{5} \iff$ les points M' appartiennent au cercle $\mathscr{C}'$.
   Remarque : $M \in \mathscr{C} \longrightarrow z = 2 + \sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$. Après calcul on en déduit que $z' = \mathrm{i} + 2\sqrt{5}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$.
   En prenant les modules on trouve bien que $|z' - \mathrm{i}| = 2\sqrt{5}$.
   Conclusion : l'image du cercle $\mathscr{C}$ est donc **tout** le cercle $\mathscr{C}'$.

EXERCICE 3 **5 points**

Réservé aux candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

1. Figure.



2. L'égalité vectorielle $\overrightarrow{\Omega M'} = 2\overrightarrow{\Omega M}$ se traduit par $z' + 1 = 2(z+1) \iff z' = 2z+1$.

$z'_{A'} = 2z_A + 1 = 2 \times \left(-\dfrac{i}{2}\right) + 1 = 1 - i = z_E$.

$z'_{B'} = 2z_B + 1 = 2 \times \left(1 - \dfrac{i}{2}\right) + 1 = 3 - i = z_F$.

$z'_{C'} = 2z_C + 1 = 2 \times \left(1 + \dfrac{i}{2}\right) + 1 = 3 + i = z_G$.

$z'_{D'} = 2z_D + 1 = 2 \times \left(\dfrac{i}{2}\right) + 1 = 1 + i = z_H$.

L'image de S_1 par h est donc S_2.

3. $g = h^{-1} \circ s$.

a. La similitude s transformant le carré de côté 1 en le carré de côté 2, le rapport de la similitude est égal à 2.

b. h^{-1} est l'homothétie de centre Ω de rapport $\dfrac{1}{2}$; la composée g est donc une similitude directe de rapport 1, donc une isométrie. S_1 a pour image par s S_2 qui lui-même a pour image par h^{-1}, S_1. Conclusion g laisse S_1 globalement invariante.

c. S_1 étant invariant, son centre l'est également : $g(O_1) = O_1$.

d. Les isométries du carré sont :

— l'identité ;
— la rotation r_1 de centre O_1 d'angle $\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$;
— la rotation r_2 de centre O_1 d'angle π $[2\pi]$ (symétrie autour de O_1) ;
— la rotation r_3 de centre O_1 d'angle $-\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.

e. On a $s = h \circ g$. Il y a donc quatre similitudes qui transforment S_1 en S_2 :

— l'homothétie h ;
— la composée de h avec r_1 ;
— la composée de h avec r_2 ;
— la composée de h avec r_3 ;

4. Écritures complexes de ces isométries :

a. — $h \circ r_1$:

L'écriture complexe de r_1 est $z' - \dfrac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z - \dfrac{1}{2}\right) \iff z' = iz - \dfrac{i}{2} + \dfrac{1}{2}$;

celle de $h \circ r_1$ est donc : $z' = 2iz - i + 2$.

— $h \circ r_2$:

L'écriture complexe de r_2 est $z' - \dfrac{1}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\left(z - \dfrac{1}{2}\right) \iff z' = -z+1$; celle de $h \circ r_2$ est donc $z' = -2z+3$;

— $h \circ r_3$:

L'écriture complexe de r_3 est $z' - \dfrac{1}{2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\left(z - \dfrac{1}{2}\right) \iff z' = -\mathrm{i}z + \dfrac{\mathrm{i}}{2} + \dfrac{1}{2}$; celle de $h \circ r_3$ est donc $z' = -2\mathrm{i}z + \mathrm{i} + 2$.

5. Les centres de ces similitudes sont les points invariants :

— Centre Ω_1 de $h \circ r_1$. Son affixe ω_1 est solution de $z = 2\mathrm{i}z - \mathrm{i} + 2 \iff z = \omega_1 = \dfrac{4+3\mathrm{i}}{5}$.

— Centre Ω_2 de $h \circ r_2$. Son affixe ω_2 est solution de $z = -2z+3 \iff z = \omega_2 = 1$.

— Centre Ω_3 de $h \circ r_3$. Son affixe ω_3 est solution de $z = -2\mathrm{i}z + \mathrm{i} + 2 \iff z = \omega_3 = \dfrac{4-3\mathrm{i}}{5}$.

EXERCICE 4 — 7 points

Commun à tous les candidats

1. Si $n = 1$, $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^2 (2-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$. On intègre par parties :

$u(x) = 2-x \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$
$u'(x) = -1 \quad v(x) = \mathrm{e}^x$.

Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées continues sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, donc :

$\mathrm{I}_1 = [(2-x)\mathrm{e}^x]_0^2 - \displaystyle\int_0^2 -\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -2 + \left[\mathrm{e}^x\right]_0^2 = -2 + \mathrm{e}^2 - 1 = \mathbf{e^2 - 3}$.

2. On a les équivalences $0 \leqslant x \leqslant 2 \iff -2 \leqslant -x \leqslant 0 \iff 0 \leqslant 2-x \leqslant 2 \iff 0 \leqslant (2-x)^n \leqslant 2^n \iff 0 \leqslant (2-x)^n\mathrm{e}^x \leqslant 2^n\mathrm{e}^x \iff 0 \leqslant \dfrac{1}{n!}(2-x)^n\mathrm{e}^x \leqslant \dfrac{1}{n!}2^n\mathrm{e}^x$.

On en déduit l'ordre des intégrales suivantes :

$\displaystyle\int_0^2 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 \frac{1}{n!}2^n\mathrm{e}^x\mathrm{d}x \iff 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n!}\times 2^n\left(\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^0\right) \iff 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{2^n}{n!}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$.

3. On a $I_{n+1} = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(n+1)!}(2-x)^{n+1}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Intégrons par parties en posant :

$u(x) = (2-x)^{n+1} \quad v'(x) = \mathrm{e}^x$
$u'(x) = -(n+1)(2-x)^n \quad v(x) = \mathrm{e}^x$.

Les fonctions u et v sont dérivables et leurs dérivées continues sur l'intervalle $[0\,;\,2]$, donc :

$I_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\left(\left[(2-x)^{n+1}\mathrm{e}^x\right]_0^2 - \displaystyle\int_0^2 -(n+1)(2-x)^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right) = -\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} + \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 (2-x)^n\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_n$.

4. Démontrons la relation par récurrence :

- *Initialisation* : $\mathrm{e}^2 - 1 = 2 + \mathrm{I}_1 \iff \mathrm{I}_1 = \mathrm{e}^2 - 3$: vrai au rang 1 ;
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ et supposons que $\mathrm{e}^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \cdots + \dfrac{2^n}{n!} + I_n$.

D'après la question précédente, on peut écrire : $\mathrm{e}^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + \cdots + \dfrac{2^n}{n!} + \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$ qui est bien la relation demandée au rang $n+1$. L'égalité est donc vraie pour tout n supérieur ou égal à 1.

5. **a.** Quel que soit le naturel n, $u_n > 0$. Le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{2^n} = \dfrac{2}{n+1}$.

Or $n \geqslant 3 \iff n+1 \geqslant 4 \iff \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{4} \iff \dfrac{2}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Conclusion : si $n \geqslant 3$, alors $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_n$.

b. Démonstration par récurrence :

- Hérédité : la double inégalité est vraie pour $n = 3$; en effet :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \quad \text{et} \quad u_3 = \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}.$$

- Hérédité : supposons qu'il existe $n \geqslant 3$ tel que

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

On a démontré que pour $n \geqslant 3$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_n$ ce qui entraîne :

$$u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n \leqslant \frac{1}{2} u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$

soit finalement $u_{n+1} \leqslant u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1-3}$.

La relation est vraie au rang $n+1$.

Il est également clair que si $n \geqslant 3$, alors $u_n \geqslant 0$.

Conclusion : pour $n \geqslant 3$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant u_3 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$.

6. On a $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$.

Donc d'après l'encadrement trouvé à la question 5 b on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

On a également $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$; donc d'après l'encadrement démontré à la question 2. on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

7. En reprenant l'égalité obtenue à la question 4. et par limite on obtient que :

$$\mathrm{e}^2 = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \cdots + \frac{2^n}{n!}\right).$$