Corrigé du baccalauréat S Asie juin 2007

EXERCICE 1 **4 points**

1. On a $f'(x) = 2\cos x \sin x = \sin 2x$. Vrai
2. En intégrant par parties car toutes les fonctions sont continues :
$\begin{cases} u(t) = t & ; \quad u'(t) = 1 \\ v'(t) = f'(t) & ; \quad v(t) = f(t) \end{cases}$
$\displaystyle\int_{-1}^{1} tf'(t)\,\mathrm{d}t = [tf(t)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(1) - (-1)f(-1) - \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t =$
$\displaystyle f(1) + f(-1) - \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t.$
Or $f(-1) = -f(1)$, donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} tf'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$. Vrai
3. Avec $f(x) = x$ et $g(x) = -\dfrac{x}{3} + 3$, $\displaystyle\int_0^3 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{2}$ et $\displaystyle\int_0^3 \left(-\frac{x}{3} + 3\right)\mathrm{d}x =$
$\displaystyle\left[-\frac{x^2}{6} + 3x\right]_0^3 = -\frac{9}{6} + 9 = \frac{15}{2}.$
On a bien $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x$ et $f(3) = 3$ et $g(3) = 2$. Faux
4. f est solution de l'équation différentielle, donc $f'(x) = -2f(x) + 2 =$
$2(1 - f(x))$. Si f est constante, alors $f'(x) = 0$ et par conséquent
$2(1 - f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = 1$. Comme la fonction n'est pas constante $f(x) \neq 1$,
donc $2(1 - f(x)) = f'(x) \neq 0$. Aucune tangente n'est horizontale. Vrai

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** $z_0 = 0$, $z_1 = \lambda \times 0 + \mathrm{i} = \mathrm{i}$, $z_2 = \lambda\mathrm{i} + \mathrm{i} = (\lambda + 1)\mathrm{i}$, $z_3 = \lambda[(\lambda+1)\mathrm{i}] + \mathrm{i} = \lambda^2\mathrm{i} + \lambda\mathrm{i} + \mathrm{i} = \left(\lambda^2 + \lambda + 1\right)\mathrm{i}$.

   b. Par récurrence :
   - *Initialisation* : $z_0 = 0 = \dfrac{\lambda^0 - 1}{\lambda - 1}\mathrm{i}$. La relation est vraie au rang 0.
   - *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot \mathrm{i}$.

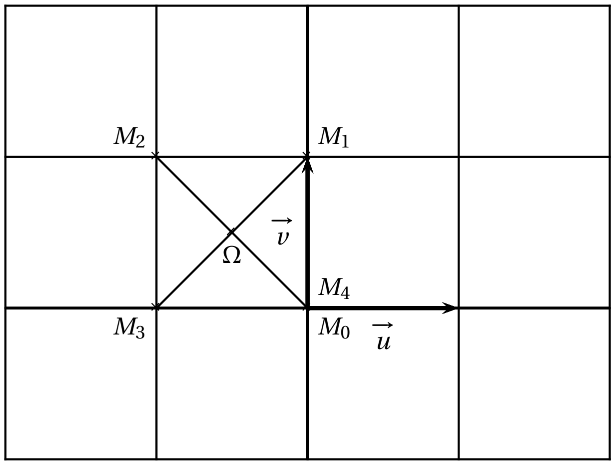
   On sait que $z_{n+1} = \lambda z_n + \mathrm{i} = \lambda\dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot \mathrm{i} + \mathrm{i} = \dfrac{\lambda^{n+1} - \lambda + \lambda - 1}{\lambda - 1} \cdot \mathrm{i} = \dfrac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1} \cdot \mathrm{i}$.
   La formule est vraie au rang $(n + 1)$.
   La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est au rang $n + 1$; on a donc démontré par récurrence que $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot \mathrm{i}$ pour tout naturel n.
2. $\lambda = \mathrm{i}$

   a. D'après 1. a., on a $z_3 = (-1 + \mathrm{i} + 1)\mathrm{i} = -1$.
   Donc $z_4 = \mathrm{i} \times (-1) + \mathrm{i} = 0$.
   Ou plus rapide en utilisant la formule du 1. b. : $z_4 = \dfrac{\mathrm{i}^4 - 1}{\mathrm{i} - 1} \cdot \mathrm{i} = 0 \cdot \mathrm{i} = 0$.

   b. $z_{n+4} = \dfrac{\mathrm{i}^{n+4} - 1}{\mathrm{i} - 1} \cdot \mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{i}^n \times \mathrm{i}^4 - 1}{\mathrm{i} - 1}\mathrm{i} = \dfrac{\mathrm{i}^n - 1}{\mathrm{i} - 1} \cdot \mathrm{i} = z_n$.
   Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+4} = z_n$.

c. On a donc $z_{n+1} = (z_n + 1)\,\mathrm{i} \quad (1)$.
Cherchons un point invariant par la transformation $z_n \longmapsto z_{n+1}$. S'il existe un point invariant Ω d'affixe ω, on doit avoir $\omega = (\omega+1)\,\mathrm{i} \iff \omega(1-\mathrm{i}) = \mathrm{i} \iff \omega = \dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}} \iff \omega = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2}$.
On a donc en retranchant ω à chaque membre de (1) :
$z_{n+1} - \omega = (z_n+1)\,\mathrm{i} - \omega \iff z_{n+1} + \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2} = (z_n+1)\,\mathrm{i} + \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{1}{2} \iff z_{n+1} - \omega = z_n\mathrm{i} + \mathrm{i}\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times (-\mathrm{i})^2 = \left[z_n - \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\right)\right]\mathrm{i} \iff z_{n+1} - \omega = (z_n - \omega)\,\mathrm{i} \iff z_{n+1} - \omega = (z_n - \omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.
Conclusion M_{n+1} est l'image de M_n dans la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

d.



3. a. Il existe k tel que $\lambda^k = 1$.
On peut donc écrire $z_n = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot \mathrm{i} = \dfrac{\lambda^n \times \lambda^k - 1}{\lambda - 1} \cdot \mathrm{i} = \dfrac{\lambda^{n+k} - 1}{\lambda - 1} \cdot \mathrm{i} = z_{n+k}$.

b. $z_{n+k} = z_n \iff \dfrac{\lambda^{n+k} - 1}{\lambda - 1} \cdot \mathrm{i} = \dfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \cdot \mathrm{i} \iff \lambda^{n+k} - 1 = \lambda^n - 1 \iff \lambda^{n+k} = \lambda^n \iff \lambda^n \times \lambda^k = \lambda^n \iff \lambda^k = 1$.

EXERCICE 2 — 5 points

Enseignement de spécialité

Partie I

1. a. On sait que la similitude directe s telle que $s(\mathrm{O}) = \mathrm{A}$ et $s(\mathrm{B}) = \mathrm{O}$ est unique et que son écriture complexe est : $z' = az + b$, a et b étant deux complexes.
On a donc en utilisant les affixes des deux points O et B et de leurs images :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 10 & = & a \times 0 + b \\ 0 & = & a \times 5\mathrm{i} + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 10 & = & b \\ 2\mathrm{i} & = & a \end{array}\right.$$

L'écriture complexe de s est donc $z' = 2\mathrm{i}z + 10$.

b. Éléments caractéristiques :
— Rapport de la similitude : c'est $|a| = |2\mathrm{i}| = 2$.
— Angle de la similitude : c'est $arg(a) = \dfrac{\pi}{2}$
— Point invariant : c'est le point Ω d'affixe ω vérifiant $\omega = 2\mathrm{i}\omega + 10 \iff \omega(1-2\mathrm{i}) = 10 \iff \omega = \dfrac{10}{1-2\mathrm{i}} = \dfrac{10(1+2\mathrm{i})}{1+4} = 2+4\mathrm{i}$.
La similitude s a pour centre $\Omega(2+4\mathrm{i})$, pour rapport 2 et pour angle $\dfrac{\pi}{2}$.

c. $s \circ s(\mathrm{B}) = s(\mathrm{O}) = \mathrm{A}$.

La transformation $s \circ s$, composée de similitudes directes de centre Ω est une similitude directe de centre Ω, de rapport 4 (produit des rapports) et d'angle π (somme des angles). $s \circ s$ est donc une homothétie de centre Ω et de rapport -4. Le point Ω est donc situé sur le segment $[AB]$. Plus exactement : puisque $\overrightarrow{\Omega A} = -4\overrightarrow{\Omega B}$, le point Ω est barycentre du système pondéré $\{(A,\ 1)\ ;\ (B,\ 4)\}$.

De plus $\left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega O}\right) = \pi/2$ donc Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOB.

2. a. On a aisément $\mathrm{A}' \in \mathscr{D}$ (car les coordonnées de $A(8,4)$ vérifient l'équation de $\mathscr{D} : x - 2y = 0$) et $\mathrm{B}' \in \mathscr{D}$.

Un vecteur normal à $\mathscr{D}$ est le vecteur $\overrightarrow{a}\binom{1}{2}$. Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$ a pour coordonnées $\binom{-2}{-4}$ et est donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{a}$, donc (AA') est perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et A' est bien le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{D}$. On démontre de même que B' est le projeté orthogonal de B sur $\mathscr{D}$.

b. L'image de B' a pour affixe $z' = 2\mathrm{i}(2+\mathrm{i}) + 10 = 4\mathrm{i} + 8 = z_{\mathrm{A}'}$ donc $s(B') = A'$

c. L'angle de la similitude étant égal à $\dfrac{\pi}{2}$, on a $\left(\overrightarrow{\Omega \mathrm{B}'},\ \overrightarrow{\Omega \mathrm{A}'}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Conclusion le point Ω appartient au cercle de diamètre $[\mathrm{A}'\mathrm{B}']$.

Partie II

1. a. On sait que la similitude directe s est telle que $s(\mathrm{O}) = \mathrm{A}$ et $s(\mathrm{B}) = 0$. Son angle est donc $\left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO}\right) = \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) + \pi = -\dfrac{\pi}{2} + \pi = \dfrac{\pi}{2}$.

b. Comme dans la partie I, $\left(\overrightarrow{\Omega \mathrm{O}},\ \overrightarrow{\Omega \mathrm{A}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, le triangle $\mathrm{O}\Omega\mathrm{B}$ est rectangle en Ω, donc Ω appartient au (demi-)cercle de diamètre [OA].

De même Ω appartient au (demi-)cercle de diamètre [OB].

La droite $(\mathrm{O}\Omega)$ perpendiculaire aux droites $(\Omega\mathrm{A})$ et $(\Omega\mathrm{B})$ est donc (d'après l'unicité de la perpendiculaire à une droite passant par un point) perpendiculaire à la droite (AB). Ω est donc le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.

2. a. Image par s de la droite (BB') : l'image de B est O et l'image de B' est B'' tel que (BB') soit perpendiculaire à (OB'') ; or (BB') est perpendiculaire à $\mathscr{D}$: donc B'' appartient à $\mathscr{D}$.

Conclusion : l'image par s de la droite (BB') est la droite $\mathscr{D}$.

De même O point de $\mathscr{D}$ a pour image A et A' a pour image A'' tel que la droite (AA'') soit perpendiculaire à $\mathscr{D}$. Or (AA') est perpendiculaire à $\mathscr{D}$, donc l'image de $\mathscr{D}$ est la droite (AA').

b. D'après la question précédente B' point de (BB') a pour image un point de $\mathscr{D}$ et B' point de $\mathscr{D}$ a pour image un point de (AA'). Conclusion : l'image de B' appartient à $\mathscr{D} \cap (\mathrm{AA}') = \{\mathrm{A}'\}$. L'image par s de B' est A'.

c. Par définition de la similitude d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, si B' est distinct de Ω, $\left(\overrightarrow{\Omega \mathrm{B}'},\ \overrightarrow{\Omega \mathrm{A}'}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ et si $B' = \Omega$, $B' = \Omega = A'$

Conclusion : Dans les deux cas, le point Ω appartient au cercle de diamètre $[\mathrm{A}'\mathrm{B}']$

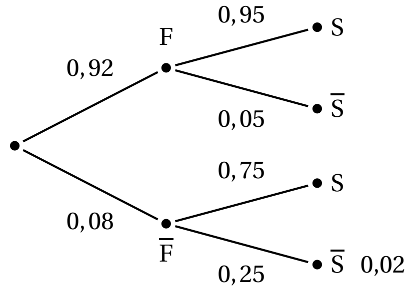
EXERCICE 3 — 4 points

1. a. On a $p(\mathrm{F}) = 0,92$; $p_{\mathrm{F}}(\mathrm{S}) = 0,95$; $p\left(\overline{\mathrm{F}} \cap \overline{\mathrm{S}}\right) = 0,02$.

b. $p(\text{F}) = 0,92 \Rightarrow p\left(\overline{F}\right) = 0,08$.

c. On sait que $p_{\overline{\text{F}}}\left(\overline{\text{S}}\right) = \dfrac{p\left(\overline{\text{F}} \cap \overline{\text{S}}\right)}{p\left(\overline{F}\right)} = \dfrac{0,02}{0,08} = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

d. Arbre pondéré :



2. a. D'après la loi des probabilités totales on a : $p(\text{S}) = p(\text{S} \cap \text{F}) + p\left(\text{S} \cap \overline{\text{F}}\right) = 0,92 \times 0,95 + 0,08 \times 0,75 = 0,874 + 0,06 = 0,934$.

b. Il faut trouver la probabilité conditionnelle $p_{\text{S}}(\text{F}) = \dfrac{p(\text{S} \cap \text{F})}{p(\text{S})} = \dfrac{0,874}{0,934} \approx 0,935\,7 \approx 0,936$.

3. a. Loi de probabilité de B :

évènement	$\text{F} \cap \text{S}$	$\overline{\text{F}} \cap \text{S}$	reste
probabilité	0,874	0,06	0,066
bénéfice : b €	10	5	0

b. On a $\text{E}(B) = 0,874 \times 10 + 0,06 \times 5 + 0,166 \times 0 = 8,74 + 0,30 = 9,04$ € (ce qui représente le bénéfice moyen par jouet).

4. On a une épreuve de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et de probabilité $p(\text{S}) = 0,934$.

La probabilité cherchée est égale à celle d'avoir 8, 9 ou 10 jouets solides, soit :

$$\binom{10}{8} 0,934^8 \times (1-0,934)^2 + \binom{10}{9} 0,934^9 \times (1-0,934)^1 + \binom{10}{10} 0,934^{10} \times (1-0,934)^0 =$$

$$0,113\,521 + 0,356\,998 + 0,505\,206 \approx 0,975\,725 \approx 0,976.$$

EXERCICE 4 **7 points**

Partie I

1. Équation E_2 : $x^2 = 2^x$.
On a $2^2 = 2^2$ et $4^2 = 2^4$: 2 et 4 sont solutions de E_2.

2. $a^a = a^a$: donc a est solution de E_a.

3. Équation E_e : $x^\text{e} = \text{e}^x$. Étude de la fonction h définie par : $h(x) = x - \text{e} \ln x$.

a. Question de cours : on sait que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{\text{e}^t}{t} = +\infty$. Quelque soit t il existe x tel que $t = \ln x$.
Donc $\dfrac{\text{e}^t}{t} = \dfrac{\text{e}^{\ln x}}{\ln x} = \dfrac{x}{\ln x}$.
D'après l'hypothèse initiale $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$, car $t \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty$.
Finalement en prenant l'inverse : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

b. Comme $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = +\infty$.

On peut écrire $h(x) = x\left(1 - \mathrm{e}\dfrac{\ln x}{x}\right)$. D'après la question de cours la parenthèse a pour limite 1, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

c. h est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et $h'(x) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}}{x} = \dfrac{x - \mathrm{e}}{x}$.

Si $x > \mathrm{e}$, $h'(x) > 0$ et h est croissante;

Si $x < \mathrm{e}$, $h'(x) < 0$ et h est décroissante. D'où le

d. Tableau de variations de h

x	0		e		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a $h(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - \mathrm{e}\ln \mathrm{e} = \mathrm{e} - \mathrm{e} = 0$. D'après ce tableau $h(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}$.

L'équation $\mathrm{E_e}$ $\quad x^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{x}$ est équivalente (en prenant le logarithme népérien) à $\mathrm{e}\ln x = x \iff h(x) = 0$.

Conclusion : l'équation $\mathrm{E_e}$ a une solution unique e.

Partie II

1. $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$. x solution de $\mathrm{E}_a \iff x^a = a^x \iff a\ln x = x\ln a \iff \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln a}{a}$.

2. **a.** $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

D'après 1. a. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

b. f est dérivable comme fonction quotient de fonctions dérivables (avec $x \neq 0$) et $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

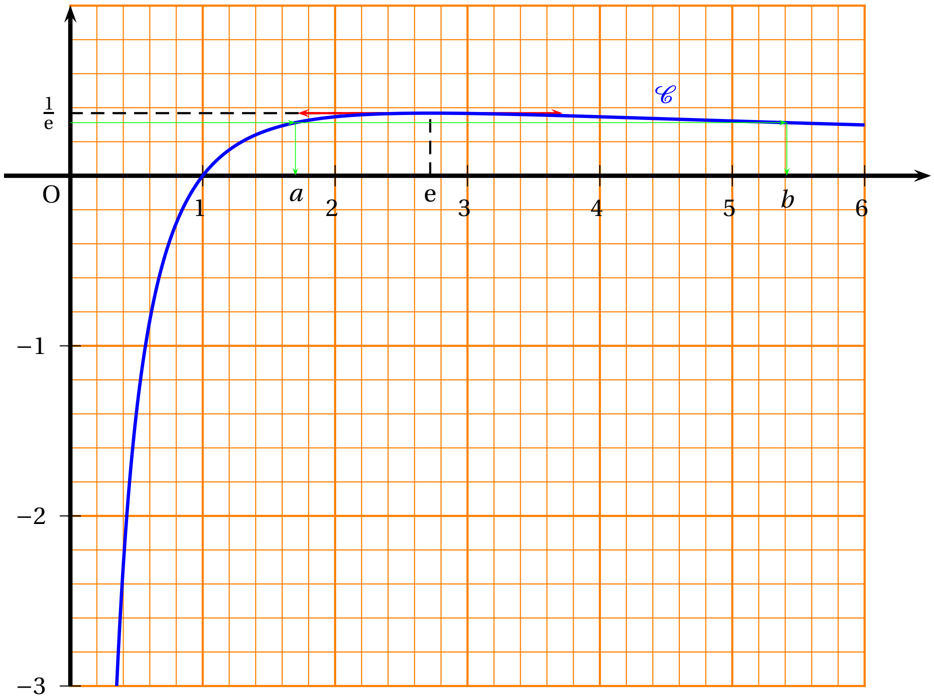
$f'(x) > 0 \iff 1 - \ln x > 0 \iff \ln x < \ln \mathrm{e} \iff x < \mathrm{e}$.

De même $f'(x) < 0 \iff x > \mathrm{e}$. D'où le

c. Tableau de variations de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

d. Tracé de $\mathscr{C}$



3. D'après le graphe précédent :

— Si $0 < a \leqslant 1$ tout nombre négatif a un unique antécédent par f, donc la seule solution de E_a est a.

— Si $1 < a < e$ ou si $a > e$, tout nombre positif (compris entre 0 et $\frac{1}{e}$) a deux antécédents par f : a et b.