∽ Corrigé du baccalauréat ES Asie juin 2006 ∾

Exercice 1 — 3 points

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1$$

a. $f(\ln(2)) = \mathrm{e}^{-\ln 2} - 1 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}} - 1 = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{3}{2}$. Donc fausse.

b. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$. Donc vraie.

c. Pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, donc fausse.

d. Une primitive de e^{-x} sur $\mathbb{R}$ est $-\mathrm{e}^{-x}$, donc :

$\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x} - x\right]_{-1}^{0} = -1 - \left(-\mathrm{e}^{-(-1)} - (-1)\right) = -1 + \mathrm{e} - 1 = \mathrm{e} - 2 \approx 0{,}71828$, donc fausse..

e. On a $f(x) < 0 \iff \mathrm{e}^{-x} - 1 < 0 \iff \mathrm{e}^{-x} < 1 \iff -x < 0 \iff x > 0$.

f étant la dérivée de F, F est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$. Donc fausse.

f. Pour tout nombre réel x, on a $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - x + C$. Or :

$F(0) = 0 \iff -\mathrm{e}^{-0} - 0 + C = 0 \iff C = 1$.

Donc $F(x) = -\mathrm{e}^{-x} - x + 1$. Donc affirmation vraie.

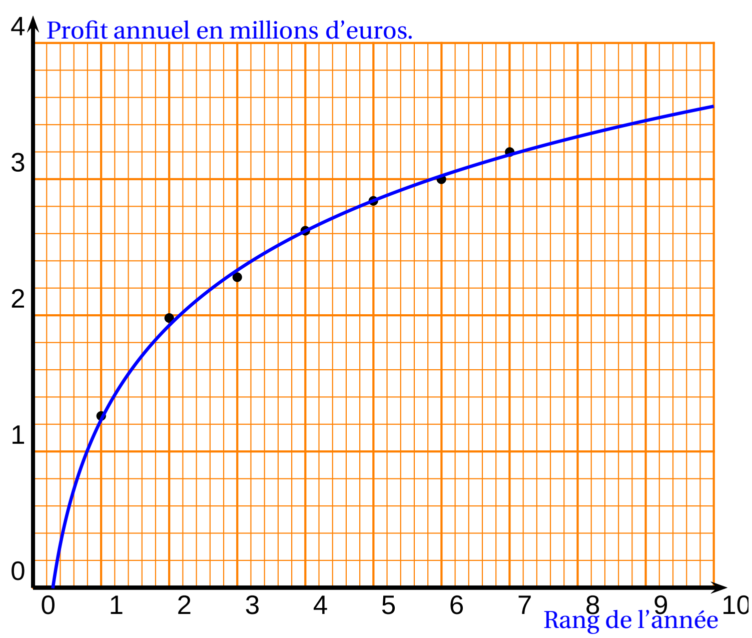
Exercice 2 — 5 points

(pour les candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité)

Le tableau suivant donne l'évolution du profit annuel d'une entreprise de l'année 1999 à l'année 2005.

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année (x_i)	1	2	3	4	5	6	7
Profit annuel en millions d'euros (y_i)	1,26	1,98	2,28	2,62	2,84	3,00	3,20

1. Construire le nuage de points associé à la série $(x_i\,;\,y_i)$ dans le repère orthogonal représenté ci-dessous.



2. La forme du nuage suggère un ajustement logarithmique. On décide donc d'étudier la série $(x_i\ ;\ z_i)$, où $z_i = \mathrm{e}^{y_i}$.
Recopier et compléter le tableau ci-dessous par les valeurs décimales arrondies au centième.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \mathrm{e}^{y_i}$	3,53	7,24	9,78	13,74	17,12	20,09	24,53

3. La calculatrice donne $z = 3,43x - 0,001$, soit en arrondissant les coefficients au centième près : $z = 3,43x$.

4. On a donc $z = \mathrm{e}^y = 3,43x \iff y = \ln 3,43x$ pour $x > 0$, ou encore :

$$y = \ln x + \ln 3,43 \approx y = \ln x + 1,23.$$

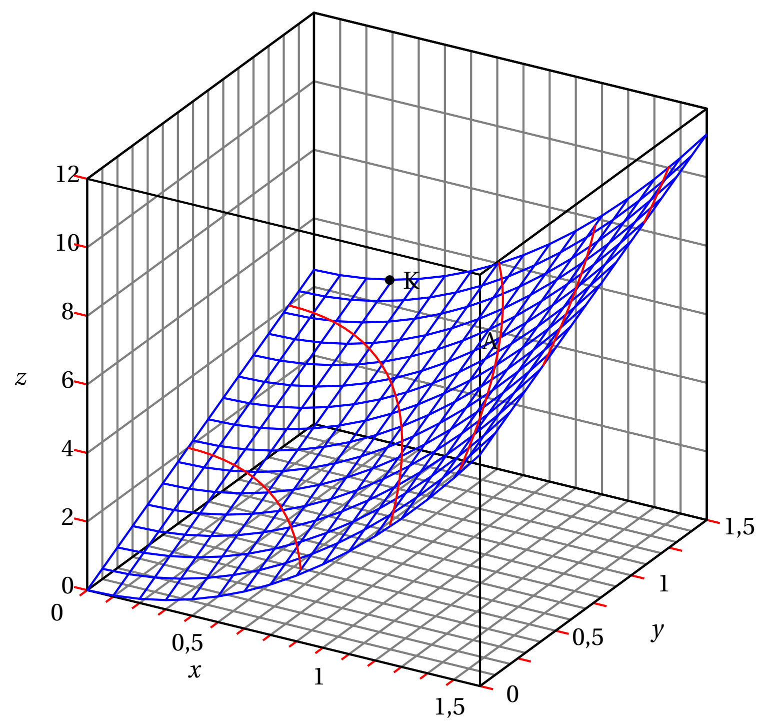
5. **a.** 2008 correspond au rang $x = 10$, d'où $y_{10} = \ln 10 + 1,23 \approx 3,53$.
Le profit annuel attendu en 2008 sera environ de 3,53 millions d'euros.

b. Il faut résoudre l'inéquation;
$\ln x + 1,23 \geqslant 3 \times 1,26 \iff \ln x \geqslant 3,78 - 1,23 \iff \ln x \geqslant 2,55 \iff x \geqslant \mathrm{e}^{2,55}$
Comme $\mathrm{e}^{2,55} \approx 12,81$, il faut prendre au moins $x = 13$, soit l'année 2011.

Exercice 2 — 5 points

(pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)

On a représenté ci-dessous la surface (S) d'équation $z = 3(x^2 + y)$, avec x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1,5]$, et y appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1,5]$.



Partie A - Exploitation du graphique.

On considère le plan (P) d'équation $z = 6$.

1. Voir la surface.

2. Voir la surface.

Partie B - Recherche d'un coût minimum.

1. On a donc $x+y=2$.
On a donc le système :
$$\left\{\begin{array}{lll} C(x\,;\,y) & = & 3\left(x^2+y\right)\\ x+y & = & 2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} C(x\,;\,2-x) & = & 3\left(x^2+2-x\right)\\ x+y & = & 2\end{array}\right.$$
On a donc $C(x\,;\,2-x)=3\left(x^2-x+2\right)=3x^2-3x+6$. (trinôme du second degré) On note f la fonction ainsi obtenue.
Vérifier que $f(x)=3x^2-3x+6$.

2. On a $C(x\,;\,2-x)=3\left[\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right]+6=3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{21}{4}$.

La plus petite valeur de C, somme de deux carrés est obtenue quand le carré $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$ est nul, donc pour $x=\dfrac{1}{2}$.

La fonction f a pour minimum sur $[0\,;\,1,5]$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{21}{4}=5,25$.

3. D'après la question précédente en produisant 500 microprocesseurs et 1 500 cartes mères le coût de production minimal sera de 5 250 €.

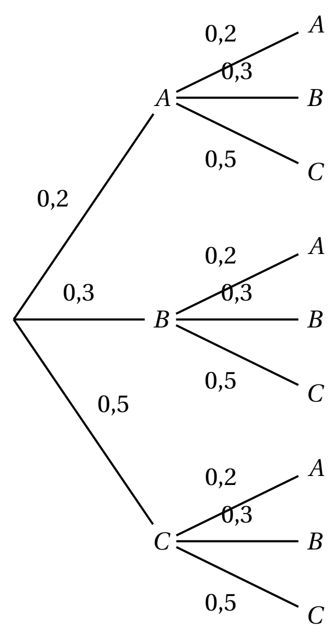
4. Voir sur la figure le point K.

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. On a donc $p_1+p_2+p_3=1 \iff p_3=1-\left(p_2+p_3\right)=1-(0,2+0,3)=1-0,5=0,5$.

2. On peut obtenir les 9 issues différentes par un arbre pondéré :



En suivant la deuxième branche, on a donc : $p(A\cap B)=0,2\times 0,3=0,06$.

3.

Secteur repéré au deuxième lancer / Secteur repéré au premier lancer	A	B	C
A	0,04	0,06	0,10
B	0,06	0,09	0,15
C	0,10	0,15	0,25

4. La probabilité d'obtenir un couple ne contenant que les secteurs A ou B est égale à :
$0,04+0,06+0,06+0,09=0,25$.

5. **a.** Recopier sur la copie et compléter le tableau suivant :

Gain (en euros)	-10	1	8
Probabilité	0,25	0,50	0,25

b. Le gain moyen est égal à l'espérance mathématique de la loi de probabilité dont le tableau est ci-dessus.
On a $g_{\text{moyen}} = -10\times 0,25+1\times 0,5+8\times 0,25 = -2,50+0,5+2=0$.
Le jeu est donc équitable.

Exercice 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

On considère les fonctions f et g définition intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^x-1 \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{3}{\mathrm{e}^x+1}$$

1. La fonction f est représentée par la courbe $\mathscr{C}$ figurant ci-dessous.

a. Une équation de T est : $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.
- $f'(x)=\mathrm{e}^x$, donc $f'(0)=\mathrm{e}^0=1$;
- $f(0)=\mathrm{e}^0-1=1-1=0$.

Donc une équation de T est $y-0=1(x-0)$ soit $y=x$.

b. Voir plus bas.

2. **étude de la fonction** g

a. $g(0)=\dfrac{3}{\mathrm{e}^0+1}=\dfrac{3}{1+1}=\dfrac{3}{2}=1,5$.

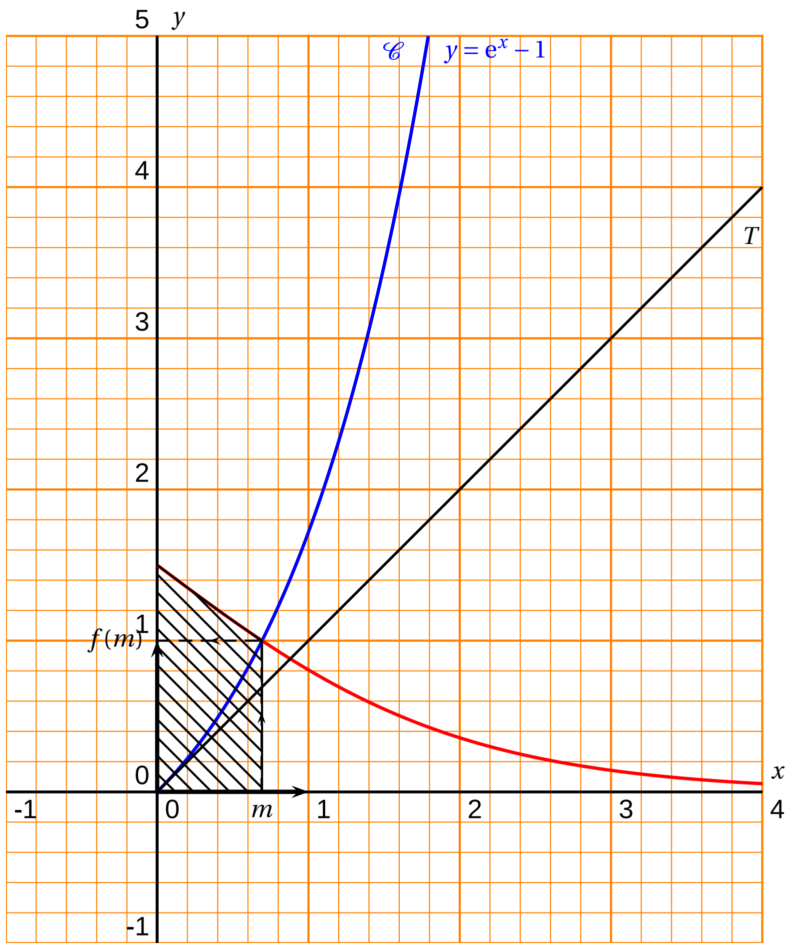
b. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x+1=+\infty$ et enfin $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$.
Ce résultat signifie géométriquement que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la représentation graphique de g au voisinage de plus l'infini.

c. Sur $[0\,;\,+\infty[$, g est dérivable et sur cet intervalle :
$g'(x)=-\dfrac{3\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}$.
Le dénominateur est positif, donc $g'(x)$ est du signe du numérateur et comme quel que soit sx, $\mathrm{e}^x>0$, on a finalement $g'(x)<0$: la fonction g est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ de $g(0)=1,5$ à 0.

d. Voir le tracé en rouge.

3. La lecture graphique montre que l'équation $f(x)=g(x)$ admet dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ unique solution, notée m.

a. Voir le dessin ci-dessous.



5
y
$\mathscr{C}$
$y = e^x - 1$
4
T
3
2
1
$f(m)$
0
x
-1
0
m
1
2
3
4
-1

b. Le point commun aux deux courbes a une abscisse m qui vérifie :

$f(m) = g(m) \iff \mathrm{e}^m - 1 = \dfrac{3}{\mathrm{e}^m + 1} \iff (\mathrm{e}^m - 1)(\mathrm{e}^m + 1) = 3 \iff \mathrm{e}^{2m} - 1 = 3 \iff$ $\mathrm{e}^{2m} = 4 \iff (\mathrm{e}^m)^2 = 2^2 \iff \mathrm{e}^m = 2 \iff m = \ln 2$ par croissance de la fonction logarithme népérien.

4. On considère le nombre suivant :

$$\mathscr{A} = \int_0^{\ln(2)} g(x)\,\mathrm{d}x$$

a. Voir le graphique

b.

$$G(x) = 3x - 3\ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$$

G est dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et sur cet intervalle :

$G'(x) = 3 - 3 \times \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{3\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - 3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{3}{\mathrm{e}^x + 1} = g(x)$.

Ce résultat montre que G est une primitive de g sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

c. On a donc $\mathscr{A} = G(\ln 2) - G(0) = \left[3\ln 2 - 3\ln\left(\mathrm{e}^{\ln 2} + 1\right)\right] - \left[3 \times 0 - 3\ln\left(\mathrm{e}^0 + 1\right)\right] = 3\ln 2 - 3 \times 3 + 3 \times 2 = 3\ln 2 - 3\ln 3 + 3\ln 2 = 6\ln 2 - 3\ln 3$.