

∞ Corrigé du baccalauréat S Asie 20 juin 2012 ∞

EXERCICE 1

5 points

1. Il est évident que le point de coordonnées $(1 ; 0 ; -5)$ appartient à \mathcal{D} mais pas à \mathcal{P} . Donc, si parallélisme il y a, il est strict.

La droite \mathcal{D} est parallèle au plan \mathcal{P} si, et seulement si, un vecteur directeur \vec{d} de \mathcal{D} est orthogonal à un vecteur normal \vec{n} au plan \mathcal{P} . Grâce aux équations, on a :

$$\vec{d} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le repère est orthonormé donc : $\vec{d} \perp \vec{n} \iff x_d \times x_n + y_d \times y_n + z_d \times z_n = 0$.
Ce que l'on vérifie facilement.

Ainsi : **Paffirmation n° 1 est vraie**.

2. La distance du point A au plan \mathcal{P} est égale, d'après la formule du cours, à :

$$d(A; \mathcal{P}) = \frac{|4 \times 1 - 9 - 0 + 3|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{18}} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi : **Paffirmation n° 2 est fausse**.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \implies$ la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $+\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \implies$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$.

Ainsi : **Paffirmation n° 3 est vraie**.

4. Considérons le réel $F(1,5) = \int_1^{1,5} (2-t)e^{-t} dt$.

La fonction $t \mapsto (2-t)e^{-t}$ est évidemment continue et strictement positive sur l'intervalle d'intégration $[1; 1,5]$. Donc, d'après théorème du cours, on en conclut que $\int_1^{1,5} (2-t)e^{-t} dt > 0$ *id est*

$F(1,5) \not\leq 0$.

Ainsi : **Paffirmation n° 4 est fausse**.

5. On va effectuer une intégration par parties avec :

$$\begin{cases} u'(t) = t^2 & ; u(t) = \frac{t^3}{3} \\ v(t) = \ln(t) & ; v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$$

Et on a bien le droit puisque toutes les fonctions (u, u', v, v') sont continues sur l'intervalle d'intégration $[1; e]$ (relire les hypothèses du théorème d'intégration par parties). Par suite :

$$I = \left[\frac{t^3}{3} \ln(t) \right]_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{3} \times \frac{1}{t} dt = \frac{e^3}{3} \ln(e) - 0 - \left[\frac{t^3}{9} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}.$$

Ainsi : **Paffirmation n° 5 est vraie**.

EXERCICE 2

5 points

Enseignement obligatoire

1. a. $|z_A| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2.$

$$z_A = 2 \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \boxed{2e^{i\frac{5\pi}{6}} = z_A}$$

b. $z_{A_1} = \overline{z_A} = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}.$

D'autre part, le cours nous donne la formule de la rotation r :

$$r(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}(z - z_O) + z_O \quad \text{id est} \quad r(z) = e^{i\frac{\pi}{6}}z$$

Par suite, on obtient :

$$z_B = r(z_{A_1}) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}e^{-i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{-i\frac{4\pi}{6}} = \boxed{2e^{-i\frac{2\pi}{3}} = z_B = -1 - i\sqrt{3}}$$

2. a. $OA = |z_A| = |\overline{z_A}| = OA_1.$

Comme B est l'image de A_1 par la rotation de centre O (isométrie), on a : $OA_1 = OB.$

$\boxed{\text{Le triangle est isocèle en O.}}$

Mais les lignes qui précèdent sont rendues inutiles par ce qui suit :

$$z_B = -1 - i\sqrt{3} = i(-\sqrt{3} + i) = e^{i\frac{\pi}{2}}z_A \implies \text{B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle } \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{\text{Le triangle est isocèle rectangle en O.}}$

b. On a :

$$\left(\overrightarrow{w}; \overrightarrow{OA} \right) = \left(\overrightarrow{w}; \overrightarrow{u} \right) + \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OA} \right) = -\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{6} = \frac{9\pi}{12}.$$

Et :

$$\left(\overrightarrow{w}; \overrightarrow{OB} \right) = \left(\overrightarrow{w}; \overrightarrow{u} \right) + \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{OB} \right) = -\frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{9\pi}{12}.$$

Conclusion : $\boxed{\Delta \text{ est la bissectrice de l'angle } \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \right)}$.

Δ est la bissectrice passant par le sommet du triangle isocèle. Donc Δ est aussi la médiatrice du segment opposé (cf programme de géométrie du collège). On en déduit évidemment que

$\boxed{\text{les points A et B sont symétriques par rapport à la droite } \Delta}$.

3. $z_{B_1} = \overline{z_B} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_{B'} = r(z_{B_1}) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \implies \boxed{B' = A}$

4. L'image de O par la symétrie d'axe Δ est lui-même puisque $O \in \Delta$. Comme la symétrie axiale est une isométrie, on en déduit que le segment [OC] a la même longueur que son image [OD]. S'il fallait le démontrer, c'est fait : OCD est isocèle en O.

On en déduit puisque Δ est la médiatrice du segment [CD] (par définition de la symétrie axiale) qu'elle est aussi la bissectrice de l'angle \hat{O} .

Conclusion : $\boxed{\text{D est l'image de C par la rotation } r_1 \text{ de centre O et d'angle } 2 \left(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{w} \right)}$.

$$\left(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{w} \right) = \left(\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{u} \right) + \left(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{w} \right) = -\arg(z_C) + \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{6}.$$

On en déduit que :

$$r_1(z) = e^{-i\frac{2\pi}{6}}z \implies z_D = r_1(z_C) = e^{-i\frac{2\pi}{6}} \cdot 2e^{i\frac{\pi}{4}} \implies \boxed{z_D = 2e^{-i\frac{\pi}{12}}}$$

EXERCICE 2
Enseignement de spécialité

5 points

Partie A : Détermination d'une similitude directe.

1. a. On a :

$$\begin{aligned} \bullet z_A &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}. \\ \bullet z_B &= -\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 2e^{\frac{5i\pi}{6}}. \end{aligned}$$

b. Voir figure.

2. a. La transformation f est une similitude directe donc elle admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$.

Comme $f(A) = B$ et $f(O) = O$, les complexes a et b vérifient le système $\begin{cases} 0 = a \times 0 + b \\ 2e^{\frac{5i\pi}{6}} = ae^{\frac{2i\pi}{3}} + b \end{cases}$ donc

$$\begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{2e^{\frac{5i\pi}{6}}}{e^{\frac{2i\pi}{3}}} = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{\frac{i\pi}{6}} \end{cases}.$$

Donc l'écriture complexe de f est $z' = 2e^{\frac{i\pi}{6}}z$.

b. On sait que f est une similitude directe de centre O .

De plus on sait que le rapport de f est donné par $\left|2e^{\frac{i\pi}{6}}\right| = 2$ puisque $|e^{i\theta}| = 1$ quel que soit le réel θ et que l'angle de f est donné par $\arg\left(2e^{\frac{i\pi}{6}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Partie B : étude d'une transformation1. a. La transformation g est la composée de f suivie de s .

Or l'écriture complexe de f est $z' = 2e^{\frac{i\pi}{6}}z$ et l'écriture complexe de s est $z' = \bar{z}$.

Par suite l'écriture complexe de $g = s \circ f$ est $z' = s\left(2e^{\frac{i\pi}{6}}z\right) = \overline{2e^{\frac{i\pi}{6}}z} = \bar{2} \times \overline{e^{\frac{i\pi}{6}}} \times \bar{z} = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}\bar{z}$.

b. On a $z_A = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $g(A) = C$ donc $z_C = z_{A'} = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}\bar{z}_A = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}e^{-\frac{2i\pi}{3}} = 2e^{-\frac{5i\pi}{6}}$.

On a $g(C) = D$ d'où $z_D = z_{C'} = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}\bar{z}_C = 2e^{-\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{-\frac{5i\pi}{6}} = 2e^{-\frac{i\pi}{6}} \times 2e^{\frac{5i\pi}{6}} = 4e^{i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right)} = 4e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Voir figure.

c. On a $\frac{z_C}{z_A} = \frac{2e^{-\frac{5i\pi}{6}}}{e^{\frac{2i\pi}{3}}} = 2e^{i\left(-\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{-\frac{3i\pi}{2}} = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i$.

Par suite comme $\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)$ et comme $\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2}$, on obtient

$\left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{2}$: le triangle OAC est rectangle en O .

d. On a $\frac{z_D}{z_A} = \frac{4e^{\frac{2i\pi}{3}}}{e^{\frac{2i\pi}{3}}} = 4 \in \mathbb{R}^*$.

Alors comme $\frac{z_{\overrightarrow{OD}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = \frac{z_D - z_O}{z_A - z_O} = \frac{z_D}{z_A} = 4$ on en déduit $z_{\overrightarrow{OD}} = 4z_{\overrightarrow{OA}}$ d'où $\overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OA}$.

Les vecteurs \overrightarrow{OD} et \overrightarrow{OA} sont donc colinéaires.

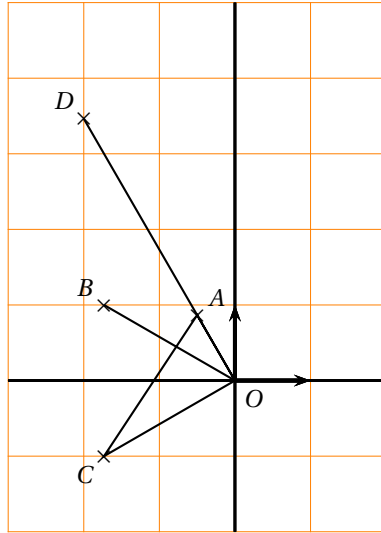
2. L'écriture complexe de la composée $g \circ g$ est $z' = g(g(z)) = g\left(2e^{-\frac{i\pi}{6}}\bar{z}\right) = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}\overline{2e^{-\frac{i\pi}{6}}\bar{z}} = 4e^{-\frac{i\pi}{6}}e^{\frac{i\pi}{6}}\bar{z} = 4z$.

Par conséquent, comme $4 \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, on en déduit que la transformation $g \circ g$ est une homothétie de rapport 4.

Remarquons que $g(g(O)) = g(O) = O$ donc O est l'unique point invariant de cette homothétie, c'est-à-dire son centre.

Donc $g \circ g$ est l'homothétie de centre O et de rapport 4.

Figure :

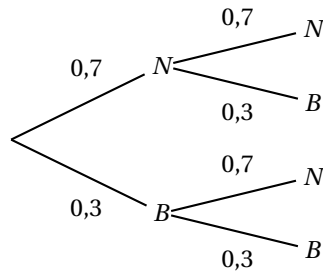


EXERCICE 3

5 points

Partie A

1.



D'où : $p = P(G) = 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7 \Rightarrow \boxed{p = 0,42}$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a. L'expérience aléatoire a deux issues :

- succès : le joueur gagne avec une probabilité de $p = 0,42$
- échec : le joueur perd avec une probabilité de $q = 1 - p = 0,58$

On répète cette expérience n fois de manière indépendante. Donc, **la variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p** .

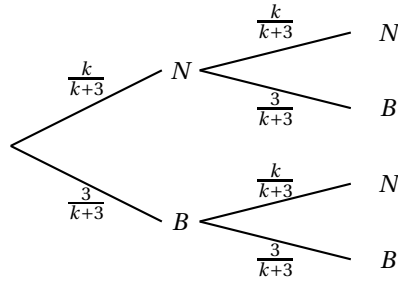
b. $p_n = 1 - P(X = 0) = \boxed{1 - 0,58^n = p_n} \Rightarrow p_{10} = 1 - 0,58^{10} \approx \boxed{0,996 \approx p_{10}}$

c. $1 - 0,58^n \geq 0,99 \Rightarrow 0,01 \geq 0,58^n \Rightarrow \ln(0,01) \geq \ln(0,58^n) \Rightarrow \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)} \leq n \Rightarrow$

le joueur doit jouer au moins 9 parties.

Partie B

1. a.



On en déduit que :

$$p(Y_k = 5) = \frac{k}{k+3} \times \frac{3}{k+3} + \frac{3}{k+3} \times \frac{k}{k+3} \Rightarrow p(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$$

b. d

$y_i =$	-9	-1	+5
$P(Y_k = y_i) =$	$\frac{9}{(k+3)^2}$	$\frac{k^2}{(k+3)^2}$	$\frac{6k}{(k+3)^2}$

$$2. E(Y_k) = -9 \times \frac{9}{(k+3)^2} + (-1) \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2} = \frac{-81 - k^2 + 30k}{(k+3)^2} = \frac{-(k-3)(k-27)}{(k+3)^2}$$

D'où :

$$E(Y_k) > 0 \iff k \in]3 ; 27[$$

Le jeu est favorable au joueur pour $k \in]3 ; 27[$.

EXERCICE 4

5 points

1.

n	u	v	a	b
0	4	9	4	9
1	6,5	6,964	6,5	6,964
2	6,732	6,736	6,732	6,736

2. a. Initialisation

Pour $n = 0$, on a bien $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$. L'hypothèse de récurrence est vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité

Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Alors :

$$u_n + v_n > 0 \Rightarrow \frac{u_n + v_n}{2} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$$

$$u_n^2 > 0 \text{ et } v_n^2 > 0 \Rightarrow u_n^2 + v_n^2 > 0 \Rightarrow \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}} > 0 \Rightarrow v_{n+1} > 0$$

La proposition est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Ainsi, la proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie pour $n \geq 0$, elle est vraie au rang suivant : d'après le principe de récurrence, on en déduit que : $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$b. v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 = \frac{2u_n^2 + 2v_n^2}{4} - \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2}{4} = \frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{4} =$$

$$\left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2 = v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geq 0 \Rightarrow v_{n+1}^2 \geq u_{n+1}^2 \Rightarrow v_{n+1} \geq u_{n+1} \Rightarrow v_n \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Par construction, $v_0 \geq u_0$.

Conclusion : $v_n \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. a. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geq 0$ d'après la question précédente.

La suite (u_n) est donc croissante.

b. $0 < u_n \leq v_n \Rightarrow u_n^2 \leq v_n^2 \Rightarrow u_n^2 + v_n^2 \leq v_n^2 + v_n^2 \Rightarrow \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} \leq v_n^2 \Rightarrow v_{n+1}^2 \leq v_n^2 \Rightarrow v_{n+1} \leq v_n$ (car les éléments de la suite v_n sont positifs).

La suite (v_n) est donc décroissante.

4. On a montré que :

- la suite u_n est croissante donc $u_0 \leq u_n$ pour tout entier naturel n ,
- la suite v_n est décroissante donc $v_n \leq v_0$ pour tout entier naturel n ,
- pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n$.

On en déduit que pour tout entier naturel n , $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ d'où en particulier $\begin{cases} u_n \leq v_0 \\ v_n \leq u_0 \end{cases}$

La suite (u_n) est croissante majorée par v_0 donc, d'après théorème, elle est convergente.

La suite (v_n) est décroissante minorée par u_0 donc, d'après théorème, elle est convergente.

Il s'agit, vous l'aurez compris, de suites adjacentes, car on peut démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.