Corrigé du baccalauréat Asie 17 mai 2022 Jour 1

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices.**

Chaque exercice est noté sur 7 points (le total sera ramené sur 20 points).

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 **7 points**

Principaux domaines abordés : Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace. Orthogonalité et distances dans l'espace. Représentations paramétriques et équations cartésiennes.

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points

$$\text{A}(-3 ; 1 ; 3), \text{B}(2 ; 2 ; 3), \text{C}(1 ; 7 ; -1), \text{D}(-4 ; 6 ; -1) \text{ et } \text{K}(-3 ; 14 ; 14).$$

1. **a.** On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\text{DC}}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}\begin{pmatrix}-1\\5\\-4\end{pmatrix}$.

b. D'après la question précédente, $\overrightarrow{\text{AB}} = \overrightarrow{\text{DC}}$ donc ABCD est un parallélogramme.
De plus le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AD}} = 5 \times (-1) + 1 \times 5 + 0 \times (-4) = 0$.
Le parallélogramme ABCD ayant deux côtés consécutifs perpendiculaires est un rectangle.

c. On a $\text{AB}^2 = 25 + 1 = 26$, d'où $\text{AB} = \sqrt{26}$;
de même $\text{AD}^2 = 1 + 25 + 16 = 42$, d'où $\text{AD} = \sqrt{42}$.
L'aire du rectangle ABCD est égale à
$\text{AB} \times \text{AD} = \sqrt{26} \times \sqrt{42} = \sqrt{26 \times 42} = \sqrt{2 \times 13 \times 2 \times 21} = 2\sqrt{13 \times 21} = 2\sqrt{273}$.

2. **a.** D'après la question 1., les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et D ne sont pas alignés : ils définissent donc bien un plan.

b. Soit le vecteur $\vec{n}(-2 ; 10 ; 13)$.
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = -10 + 10 + 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AD}} = 2 + 50 - 52 = 0$.
Conclusion : le vecteur $\vec{n}$, orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABD), est normal à ce plan.

c. Le résultat précédent montre que le plan (ABD) a une équation de la forme $-2x + 10y + 13z = d$, avec $d \in \mathbb{R}$.
Or par exemple $\text{B}(2 ; 2 ; 3) \in (\text{ABD})$ donc
$-2 \times 2 + 10 \times 2 + 13 \times 3 = d \iff -4 + 20 + 39 = d \iff d = 55$.
Donc le plan (ABD) a pour équation $-2x + 10y + 13z = 55$.

3. **a.** Si Δ est orthogonale au plan (ABD) elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$.
Comme elle contient K, on a donc :
$M(x , y ; z) \in \Delta \iff \overrightarrow{\text{K}M} = t\vec{n}, \quad t \in \mathbb{R}$.

Avec $\overrightarrow{\text{K}M}\begin{pmatrix} x-(-3)\\ y-14\\ z-14\end{pmatrix}$ ceci se traduit par le système :

$\left\{\begin{array}{l c l} x+3 & = & -2t\\ y-14 & = & 10t\\ z-14 & = & 13t\end{array}\right., t \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & -2t-3\\ y & = & 10t+14\\ z & = & 13t+14\end{array}\right., t\in\mathbb{R}$

b. Si I est le projeté orthogonal de K sur le plan (ABD), le point I est un point de Δ ; comme c'est aussi un point de (ABD) ; ses coordonnées vérifient le système

$\left\{\begin{array}{l c r} x & = & -2t-3\\ y & = & 10t+14\\ z & = & 13t+14\\ -2x+10y+13z & = & 55\end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$

En remplaçant dans la dernière équation x, y et z par leurs expressions en fonction de t, on obtient :

$-2(-2t-3)+10(10t+14)+13(13t+14) = 55$

$\iff 4t+6+100t+140+169t+182 = 55 \iff 273t = -273 \iff t = -1.$

Les premières équations donnent alors

$x = 2-3 = -1$, $\quad y = -10+14 = 4$ et $z = -13+14 = 1$.

Le point I a donc pour coordonnées $(-1\,;\,4\,;\,1)$.

c. ABCD étant un rectangle le point D appartient au plan (ABD). Donc la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD est [KI].

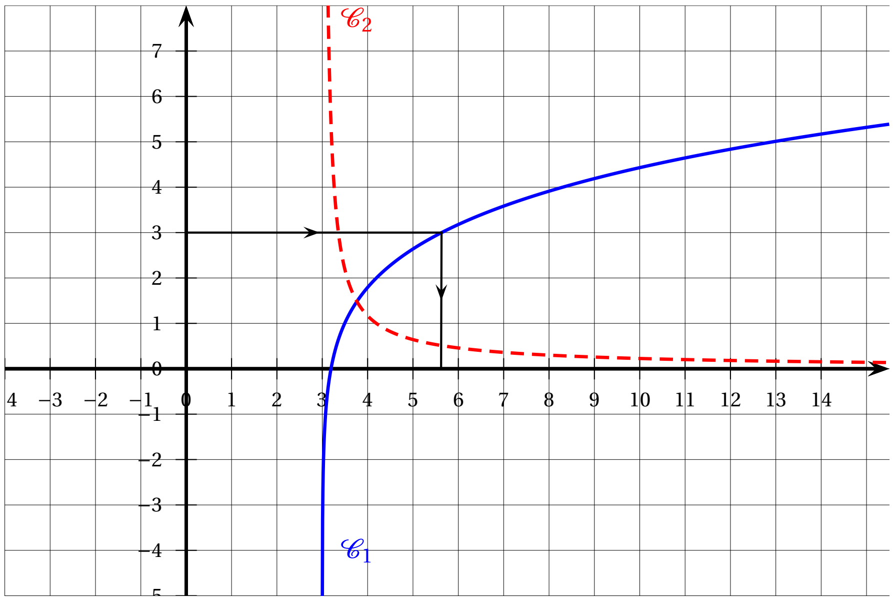
$\overrightarrow{\text{KI}}\begin{pmatrix} 2\\ -10\\ -13\end{pmatrix}$ donne $\text{KI}^2 = 4+100+169 = 273$ et enfin $\text{KI} = \sqrt{273}$.

4. On a $V = \dfrac{1}{3}\times\mathscr{A}(\text{ABCD})\times\text{KI} = \dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{273}\times\sqrt{273} = \dfrac{2\times 273}{3} = \dfrac{2\times 3\times 91}{3} = 182.$

EXERCICE 2 **7 points**

Principaux domaines abordés : Étude des fonctions. Fonction logarithme.

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f', toutes deux définies sur $]3~;~+\infty[$.

1. Si $\mathscr{C}_1$ était la représentation de la dérivée, celle-ci serait négative puis positive , donc la fonction serait décroissante puis croissante ce qui n'est pas le cas de la fonction représente par la courbe $\mathscr{C}_2$.

   Donc $\mathscr{C}_2$ est la représentation de la fonction dérivée et $\mathscr{C}_1$ celle de la fonction.
2. On lit approximativement $f(5,6) \approx 3$.
3. f semble concave sur $]3~;~+\infty[$.

Partie B

1. • $x^2 - x - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) = (x+2)(x-3)$.

   On sait que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle $[-2~;~3]$. Donc $\ln\left(x^2 - x - 6\right)$ est bien définie sur $I =]3~;~+\infty[$;

   • On peut calculer $\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$ et en déduire les racines du trinôme $x^2 - x - 6$: $x_1 = \dfrac{1+5}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et faire ensuite la même conclusion.
2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - x - 6\right)$ sur I.

   • Limite en $+\infty$: $\ln\left(x^2 - x - 6\right) = \ln x^2\left(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2}\right)$.

   On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x^2} = 0$, donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2} = 1$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, par composition de la fonction logarithme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- Limite en 3 : $f(x) = \ln(x+2)(x-3)$.

On a $\lim\limits_{x \to +3} (x+2)(x-3) = 5 \times 0 = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +3} \ln(x+2)(x-3) = -\infty$. Ceci signifie que la droite verticale d'équation $x = 3$ est asymptote à courbe représentative de la fonction f sur I (soit $\mathscr{C}_1$)

3. **a.** Sur I, on a vu que $x^2 - x - 6 > 0$, donc la fonction f est dérivable et sur I, on a $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$.

b. $f'(x)$ a le signe du numérateur $2x - 1$:

pour $x > 3$, on a $2x - 1 > 5$ donc $2x - 1 > 0$ et donc $f'(x > 0$.

Donc la fonction f est strictement croissante sur I de moins l'infini à plus l'infini.

On dresse le tableau des variations de la fonction f.

x	3	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

4. **a.** La fonction f est strictement croissante sur I et en particulier sur $]5\,;\,6[$.

De plus $f(5) = \ln(25 - 5 - 6) = \ln 14 \approx 2,64 < 3$ et $f(6) = \ln(36 - 6 - 6) = \ln 24 \approx 3,18 > 3$.

La fonction f étant continue car dérivable sur l'intervalle $]5\,;\,6[$, d'après la propriété des valeurs intermédiaires il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = 3$, avec $5 < \alpha < 6$.

b. La calculatrice donne :

$f(5,6) \approx 2,984$ et $f(5,7) \approx 3,035$, donc $5,6 < \alpha < 5,7$ puis

$f(5,63) \approx 2,999$ et $f(5,64) \approx 3,004$ donc $5,63 < \alpha < 5,64$.

5. **a.** La fonction f' quotient de fonctions dérivables sur I, le dénominateur ne s'annulant pas est elle-même dérivable sur I et sur cet intervalle :

$$f''(x) = \frac{2\left(x^2 - x - 6\right) - (2x-1)(2x-1)}{\left(x^2 - x - 6\right)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 12 - 4x^2 - 1 - 4x}{\left(x^2 - x - 6\right)^2} = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{\left(x^2 - x - 6\right)^2}.$$

b. Le signe de la dérivée seconde est celui du numérateur puisque $\left(x^2 - x - 6\right)^2 > 0$.

Or ce trinôme $-2x^2 + 2x - 13$ n'a pas de racine ($\Delta = 4 - 8 \times 13 = -100 < 0$), donc est négatif en particulier sur I.

Sur I, $f''(x) < 0$: la fonction est concave sur cet intervalle.

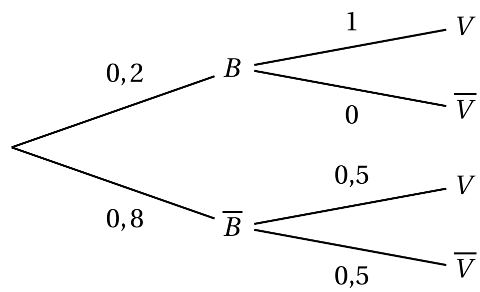
EXERCICE 3 **7 points**

Principaux domaines abordés : Probabilités conditionnelles et indépendance. Variables aléatoires.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

1. S'il a pris le bus il est à l'heure pour son vol, donc $P_B(V) = 1$.
2. On représente la situation par un arbre pondéré.



3. D'après la loi des probabilités totales :
$P(V) = P(B \cap V) + P\left(\overline{B} \cap V\right) = 0,2 \times 1 + 0,8 \times 0,5 = 0,2 + 0,4 = 0,6$.
4. On calcule $P_V(B) = \dfrac{P(V \cap B)}{P(V)} = \dfrac{P(B \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0,2}{0,6} = \dfrac{1}{3}$.

Partie 2

1. La présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres et chaque passager a la même probabilité 0,95 d'être présent, donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 206$ et $p = 0,95$.
2. On a $\text{E} = n \times p = 206 \times 0,95 = 196,3 \approx 196$. En moyenne sur 206 titulaires d'un billet à peu près 196 vont se présenter.
3. On a $P(X = 201) = \binom{206}{201} \times 0,95^{201} \times 0,05^5 \approx 0,030\,63$, soit 0,031 au millième près.
4. La calculatrice donne $P(X \leqslant 200) \approx 0,947\,7$, soit 0,948 au millième près.
Il est donc à peu près certain que l'avion sera au mieux juste rempli.
5. On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P\left(Y = y_i\right)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	0,000 03
c_i	51 500	50 650	49 800	48 950	48 100	47 250	46 400

   a. En complétant à 1 la somme des probabilités données dans le tableau on trouve :
   $P(Y = 6) = 1 - \left(P(Y = 0) + P(Y = 1) + \cdots + P(Y = 5)\right) = 0,000\,03$.

   b. La compagnie a encaissé $206 \times 250 = 51\,500$ € et elle devra rembourser 850 € à chaque client ne pouvant embarquer, donc $C = 51\,500 - 850Y$

c. Voir le tableau ci-dessus.

On a $\mathrm{E}(C) = 51\,500 \times 0{,}947\,75 + \ldots 46\,400 \times 0{,}000\,03 \approx 51\,429{,}2$, soit 51 429 € à l'euro près

d. En vendant exactement 200 billets, la compagnie fera un chiffre d'affaires de 200×250 soit 50 000 euros.

En pratiquant le surbooking, la compagnie peut espérer un chiffre d'affaires de 51 429 euros.

EXERCICE 4 — 7 points

Principaux domaines abordés : Suites numériques. Algorithmique et programmation.

Dans cet exercice, on modélise le développement d'une bactérie avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité $0,3$ de mourir sans descendance et une probabilité $0,7$ de se diviser en deux bactéries filles. Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.
On admet que, d'après ce modèle, la suite $\left(p_n\right)$ est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$.

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite $\left(p_n\right)$

a.
- $p_1 = 0,3 + 0,7 \times 0,3^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,09 = 0,3 + 0,063 = 0,363$;
- $p_2 = 0,3 + 0,7 \times 0,363^2 = 0,3 + 0,7 \times 0,131\,769 = 0,3 + 0,092\,238\,3 = 0,392\,238\,3$.

b. La probabilité d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type est égale à $1 - p_{10} \approx 1 - 0,428\,020\,18 \approx 0,571\,980 \approx 0,572$ au millième près.

c. D'après le tableau la suite $\left(p_n\right)$ semble être croissante et semble aussi avoir une limite puisque les quatre derniers résultats commencent par 0,428 5...

2. **a.** On veut démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

Initialisation : On a $0 \leqslant 0,3 \leqslant 0,363 \leqslant 0,5$, soit $0 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant 0,5$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

Si ces nombres positifs sont rangés dans dans cet ordre, leurs carrés aussi, soit
$0 \leqslant p_n^2 \leqslant p_{n+1}^2 \leqslant 0,5^2$, puis en multipliant par 0,7 :
$0 \leqslant 0,7 \times p_n^2 \leqslant 0,7 \times p_{n+1}^2 \leqslant 0,7 \times 0,5^2$ et enfin en ajoutant à chaque membre 0,3 :
$0,3 \leqslant 0,3 + 0,7 \times p_n^2 \leqslant 0,3 + 0,7 \times p_{n+1}^2 \leqslant 0,3 + 0,7 \times 0,5^2$, soit
$0,3 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,475$. On peut donc écrire :
$0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,5$: la relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est encore vraie au rang $n+1$: d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$

b. Le résultat précédent montre que la suite $\left(p_n\right)$ est croissante et majorée par 0,5 : elle est donc convergente vers une limite L telle que $L \leqslant 0,5$.

3. **a.** Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} p_{n+1} = L$, la relation de récurrence donne :

$$L = 0,3 + 0,7L^2 \iff 0,7L^2 - L + 0,3 = 0$$

L est solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.

b. On a $\Delta = 1 - 4 \times 0,7 \times 0,3 = 1 - 0,84 = 0,16 = 0,4^2 > 0$. Il y a donc deux solutions :

$$L_1 = \frac{1+0,4}{2\times 0,7} = 1, \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{1-0,4}{2\times 0,7} = \frac{0,6}{1,4} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \approx 0{,}43$$

On ne peut retenir la solution L_1 puisque $\left(p_n\right)$ est majorée par 0,5. Il reste donc L_2 : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{7}$.

4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite $\left(p_n\right)$.

On complète, les lignes 2, 4 et 5 de cette fonction de façon à ce que la fonction `suite (n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

```
1 def suite(n) :
2   p = 0.3
3   s = [p]
4   for i in range (n - 1)
5       p = 0.3+0.7*p**2
6       s.append(p)
7   return (s)
```