

∞ Corrigé du baccalauréat Asie 8 juin 2021 Jour 2 ∞  
 ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Le candidat traite 4 exercices : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

**EXERCICE 1**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**

1.

$$f(x) = (x^2 - 2x - 1)e^x.$$

On a  $f(x) = x^2e^x - 2xe^x - e^x$ .

+ On sait que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ , puis que

$$+ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^x = 0$$

+  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2e^x = 0$ , d'où par somme de limites :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ . Réponse C.

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{3}{5 + e^x}$ .

+ On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{5}$  : la droite d'équation  $y = \frac{3}{5}$  est asymptote horizontale au voisinage de moins l'infini;

+ On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  : l'axe des abscisses est asymptote horizontale au voisinage de plus l'infini. Réponse C.

3. On voit sur la figure que  $f''(-3) = f''(2) = f''(5) = 0$  : la dérivée seconde s'annule trois fois donc la fonction  $f$  admet trois points d'inflexion. Réponse B.

4. On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = n^2 - 17n + 20$ .

$$n^2 - 17n + 20 = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{17}{2}\right)^2 + 20 = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{289}{4} + \frac{80}{4} = \left(n - \frac{17}{2}\right)^2 - \frac{209}{4} = \left(n - \frac{17 + \sqrt{209}}{2}\right) \left(n - \frac{17 - \sqrt{209}}{2}\right).$$

On a donc quel que soit  $n$ ,  $u_n \geq -\frac{209}{4}$  : la suite est donc minorée. Réponse A.

5. Aucune réponse!

On démontre aisément que la suite est majorée par 20 par récurrence :

*Initialisation* :  $u_0 = 2 \leq 20$  : la relation est vraie au rang 0.

*Hérédité* : supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq 2$  alors par produit par 0,75 :

$$0,75u_n \leq 0,75 \times 20 \text{ ou encore } 0,75u_n \leq 15 \text{ puis par somme de 5 :}$$

$$0,75u_n + 5 \leq 15 + 5, \text{ soit finalement } u_{n+1} \leq 20.$$

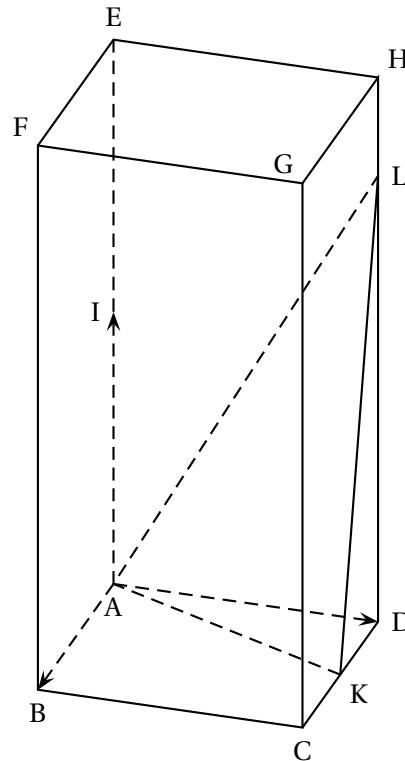
La suite étant majorée par 20 aucune des solutions proposées n'est correcte.

En fait cet algorithme tourne indéfiniment.

**EXERCICE 2**

**5 points**

**Commun à tous les candidats**



1. Avec  $C(1; 1; 0)$  et  $D(0; 1; 0)$ , on obtient  $K(\frac{1}{2}; 1; 0)$ , donc  $\overrightarrow{AK}(\frac{1}{2}; 1; 0)$  et on a  $\overrightarrow{AL}(0; 1; \frac{3}{2})$ .

2. a.  $+\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AK} = 3 - 3 + 0 = 0;$

$+\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AL} = 0 - 3 + 3 = 0$  : le vecteur  $\overrightarrow{n}$  est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan AKL, il est donc orthogonal à ce plan; c'est donc un vecteur normal à ce plan.

b. On a donc  $M(x; y; z) \in (AKL) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \iff 6x - 3y + 2z + d = 0$ , avec  $d \in \mathbb{R}$  et comme A appartient à ce plan on a :  $0 + 0 + 0 + d = 0$ .

Conclusion :  $M(x; y; z) \in (AKL) \iff 6x - 3y + 2z = 0$ .

c. La droite  $\Delta$  contient D et a pour vecteur directeur  $\overrightarrow{n}$ , donc :

$$M(x; y; z) \in \Delta \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{DM} = t \overrightarrow{n} \iff \begin{cases} x &= 6t \\ y - 1 &= -3t \\ z &= 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\begin{cases} x &= 6t \\ y &= 1 - 3t \\ z &= 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

d. Le point N est donc le point commun au plan (AKL) et à la droite  $\Delta$ , donc ses coordonnées  $(x; y; z)$  vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= 6t \\ y &= 1 - 3t \\ z &= 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow 6 \times 6t + (-3) \times (1 - 3t) + 2 \times 2t = 0 \iff \begin{cases} x &= 6t \\ y &= 1 - 3t \\ z &= 2t \\ 6x - 3y + 2z &= 0 \end{cases}$$

$36t - 3 + 9t + 4t = 0 \iff 49t = 3 \iff t = \frac{3}{49}$ ; en remplaçant dans les trois premières équations du système, on obtient :

$$\begin{cases} x = 6 \times \frac{3}{49} \\ y = 1 - 3 \times \frac{3}{49} \\ z = 2 \times \frac{3}{49} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{18}{49} \\ y = \frac{40}{49} \\ z = \frac{6}{49} \end{cases} . \text{ Conclusion : } N\left(\frac{18}{49}; \frac{40}{49}; \frac{6}{49}\right).$$

3. a. Le triangle ADK est rectangle en D; on a par définition  $AD = 1$  et  $DK = \frac{1}{2}$ .

$$\text{Donc } \mathcal{A}(\text{ADK}) = \frac{AD \times DK}{2} = \frac{1}{4}.$$

D'autre part  $DL = \frac{3}{2}$ , donc

$$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{8}.$$

- b. On a  $\overrightarrow{DN} \left( \frac{18}{49}; \frac{40}{49} - 1; \frac{6}{49} \right)$ , soit  $\overrightarrow{DN} \left( \frac{18}{49}; -\frac{9}{49}; \frac{6}{49} \right)$ , donc :

$$DN^2 = \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(-\frac{9}{49}\right)^2 + \left(\frac{6}{49}\right)^2 = \frac{18^2 + 9^2 + 6^2}{49^2} = \frac{324 + 81 + 36}{49^2} = \frac{441}{49^2} = \frac{21^2}{49^2} = \left(\frac{21}{49}\right)^2.$$

$$\text{Donc } DN = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}.$$

- c. En prenant comme base le triangle AKL, on a :

$$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \frac{\mathcal{A}(\text{AKL}) \times DN}{3}, \text{ soit } \frac{1}{8} = \frac{\mathcal{A}(\text{AKL}) \times \frac{3}{7}}{3}, \text{ d'où}$$

$$\mathcal{A}(\text{AKL}) = 7 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \text{ (u. a.)}.$$

### EXERCICE 3

5 points

#### Commun à tous les candidats

1. Il y a  $C_9^3 = \frac{9!}{3! \times (9-3)!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$  façons différentes de choisir 3 cases différentes parmi 9.

2. Il y a 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales donc 8 combinaisons gagnantes.

La probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à  $\frac{8}{84} = \frac{4 \times 2}{4 \times 21} = \frac{2}{21}$ .

3. Soit  $X$  la variable aléatoire égale au montant algébrique de la somme gagnée.

$$\text{On a } P(X = 4) = \frac{2}{21} \text{ et } P(X = -1) = \frac{19}{21}.$$

$$\text{On a donc } E(X) = 4 \times \frac{2}{21} + (-1) \times \frac{19}{21} = \frac{8 - 19}{21} = -\frac{11}{21} \approx -0,524.$$

En moyenne sur un grand nombre de parties un joueur perd 58 centimes d'euro par partie. Le jeu est défavorable au joueur.

4. a. La variable aléatoire  $X$  qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés suit une loi binomiale de paramètres  $n = 20$  et  $p = \frac{2}{21}$ .

b. On a  $p(X = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{2}{21}\right)^5 \times \left(\frac{19}{21}\right)^{20-5} \approx 0,0271$ , soit 0,027 à  $10^{-3}$  près.

- c. On a  $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{2}{21}\right)^0 \times \left(\frac{19}{21}\right)^{20} \approx (1 - 0,1351) \approx 0,8649$  soit 0,865 à  $10^{-3}$  près.

**EXERCICE au choix du candidat****5 points****Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B****Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B****EXERCICE – A****Principaux domaines abordés**

- Suites
- Équations différentielles

**Partie I : modèle discret**

1. On a pour  $n = 0$ ,  $u_1 = u_0 + 0,05(20 - u_0) = 1 + 0,05 \times 19 = 1 + 0,95 = 1,95$ .
2. **a.** Pour tout naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + 0,05(20 - u_n) = u_n + 1 - 0,05u_n = u_n(1 - 0,05) + 1 = 0,95u_n + 1$ .  
**b.** Pour tout naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = 20 - u_{n+1} = 20 - (0,95u_n + 1) = 20 - 0,95u_n - 1 = 19 - 0,95u_n = 0,95 \times 20 - 0,95u_n = 0,95(20 - u_n) = 0,95v_n$ .  
Conclusion : pour tout naturel  $n$ ,  $v_{n+1} = 0,95v_n$  : cette égalité montre que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de terme initial  $v_0 = 20 - u_0 = 20 - 1 = 19$  et de raison 0,95.  
**c.** On sait que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = v_0 \times q^n$ ,  $q$  étant la raison, soit  $v_n = 19 \times 0,95^n$ .  
Or  $v_n = 20 - u_n \iff u_n = 20 - v_n = 20 - 19 \times 0,95^n$ .
3. On vient de démontrer que pour tout naturel  $n$ ,  $u_n = 20 - 19 \times 0,95^n$ .  
Comme  $0 < 0,95 < 1$ , on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$ , d'où par somme de limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 20.$$

**Partie II : modèle continu**

$$(E) \quad y' = 0,05(20 - y)$$

1.  $L$  est la somme de fonctions dérivables sur  $[0 ; +\infty[$  et sur cet intervalle :  
 $L'(t) = -0,05 \times (-19e^{-0,05t}) = 0,95e^{-0,05t}$ .  
Donc  $L$  est solution de  $(E)$  si :  
 $y' = 0,05(20 - y) \iff 0,95e^{-0,05t} = 0,05(20 - ((20 - 19e^{-0,05t}))) \iff 0,95e^{-0,05t} = 0,05(19e^{-0,05t}) \iff 0,95e^{-0,05t} = 0,95e^{-0,05t}$  qui est vraie.  
De plus  $L(0) = 20 - 19e^{-0,05 \times 0} = 20 - 19 \times 1 = 1$ .
2. **a.**  $+ L'(0) = 0,95e^{-0,05 \times 0} = 0,95 \times 1 = 0,95$ .  
 $+ L'(5) = 0,95e^{-0,05 \times 5} = 0,95 \times e^{-0,25} \approx 0,74$ .  
Donc  $L'(0) > L'(5)$ .

b. On sait que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,05t} = 0$ , donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} L'(t) = 0$ .

Ce résultat est bien en cohérence avec la description du modèle de croissance du bambou : celui-ci a une taille croissante ( $L'(t) > 0$ ) de 1 m (taille initiale) à 20 m (taille finale), la dérivée donc la vitesse de croissance se rapprochant de zéro.

### EXERCICE – B

#### Principaux domaines abordés

- Suites, étude de fonction
- Fonction logarithme

$$f(x) = x - \ln(x-1).$$

On considère la suite  $(u_n)$  de terme initial  $u_0 = 10$  et telle que  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

#### Partie I :

1. Il faut écrire dans la cellule B3 :  $=B2 - \ln(B2 - 1)$ .
2. On peut penser que la suite est décroissante et a pour limite 2.

#### Partie II :

1. On a  $\lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x-1) = -\infty$  et enfin par somme de limites  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ .  
*Rem.* : la droite d'équation  $x = 1$  est asymptote verticale à la représentation graphique de la fonction  $f$ .

2. a. Sachant que  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ ,  $u(x)$  étant une fonction de  $x$  ne s'annulant pas sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ , on a donc :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1} \text{ sur l'intervalle } ]1; +\infty[.$$

- b. Sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  on a bien entendu  $x > 1$ , donc le signe de  $f'(x)$  est celui du dénominateur  $x-2$  :

+  $x-2 > 0 \iff x > 2$  :  $f'(x) > 0$  sur  $]2; +\infty[$ ; la fonction  $f$  est croissante sur  $]2; +\infty[$ ;

+  $x-2 < 0 \iff x < 2$  :  $f'(x) < 0$  sur  $]1; 2[$ ; la fonction  $f$  est décroissante sur  $]1; 2[$ ;

+  $x-2 = 0 \iff x = 2$  :  $f'(2) = 0$  la fonction  $f$  a un minimum  $f(2) = 2 - \ln 1 = 2 - 0 = 2$  sur  $]1; +\infty[$ . D'où le tableau de variations :

$x$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$	$+\infty$	2	$+\infty$

- c. La question précédente a montré que  $f(2) = 2$  est le minimum de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ , donc a fortiori sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

On a donc pour tout  $x \geq 2$ ,  $f(x) \geq 2$ .

### Partie III :

1. *Initialisation* : on a  $u_0 = 10 \geq 2$  : la proposition est vraie au rang 0.

*Hérédité* : supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$ , on ait :  $u_n \geq 2$ .

Par croissance de la fonction  $f$ , on a donc  $f(u_n) \geq f(2)$ , c'est-à-dire :

$u_{n+1} \geq 2$  : la proposition est donc vraie au rang  $n + 1$ .

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang  $n \in \mathbb{N}$  elle est vraie au rang  $n + 1$  : d'après le principe de récurrence la proposition :

«  $u_n \geq 2$  pour tout entier naturel  $n$  » est vraie.

2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , calculons  $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \ln(u_n - 1) - u_n = -\ln(u_n - 1)$ .

Or d'après la question précédente, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 2$ , donc  $u_n - 1 \geq 2 - 1$ , ou  $u_n - 1 \geq 1$ , donc  $\ln(u_n - 1) \geq 0$  et enfin  $-\ln(u_n - 1) \leq 0$ .

Conclusion : quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  ou  $u_{n+1} \leq u_n$  : la suite  $(u_n)$  est décroissante.

3. On a donc démontré dans les deux questions précédentes que la suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée par 2 : elle converge donc vers une limite  $\ell$ , telle  $\ell \geq 2$ .
4.  $f(\ell) = \ell \iff \ell - \ln(\ell - 1) = \ell \iff 0 = \ln(\ell - 1) \iff 1 = \ell - 1$  (par croissance de la fonction logarithme népérien), d'où  $2 = \ell$ .

La suite  $(u_n)$  converge vers le nombre 2.