Corrigé du BTS Métropole 15 mai 2023

Groupement B1 [1]

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

Exercice 1 **10 points**

Partie A – Résolution d'une équation différentielle

1. **a.** Résolvons $r^2+5r+4=0$.

$$\Delta = 5^2-4\times 1\times 4 = 25-16 = 9$$

Les solutions sont :

$$r_1 = \dfrac{-5-\sqrt{9}}{2\times 1} = -4 \text{ et } r_2 = \dfrac{-5+\sqrt{9}}{2\times 1} = -1.$$

b. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont de la forme :

$$C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-4t} \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2. **a.** On a $f(0)=20$ et $f'(0)=-10$.

b. La valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture est :

$$f(2) = \dfrac{70}{3}\mathrm{e}^{-2}-\dfrac{10}{3}\mathrm{e}^{-8}$$

Attention, on demande dans cette question une valeur exacte, et non une valeur approchée.

c) Demandons-nous quelle est la distance OM au bout de quatre secondes :

$$f(4) = \dfrac{70}{3}\mathrm{e}^{-4}-\dfrac{10}{3}\mathrm{e}^{-16} \simeq 0,43 \text{ cm.}$$

Cette distance est inférieure à 0,5 cm, on peut donc considérer que le tiroir est fermé.

Partie B – Étude de fonction

1. **a.** Le rappel nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-4t}=0$.
On en déduit que

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \dfrac{70}{3}\times 0-\dfrac{10}{3}\times 0 = 0$$

1. Aéronautique, Assistance technique d'ingénieur,Bâtiment, Conception et réalisation de carrosseries, Conception et réalisation des systèmes automatiques, Enveloppe des bâtiments : conception et réalisation, Environnement nucléaire, Fluides - énergies - domotique (3 options), Maintenance des systèmes (3 options), Traitement des matériaux (2 options), Travaux publics

b. La courbe possède ainsi une asymptote d'équation $y = 0$.

2. **a.** e^{-t} et e^{-4t} se dérivent respectivement en $-\mathrm{e}^{-t}$ et $-4\mathrm{e}^{-4t}$. Ainsi :

$$f'(t) = \frac{70}{3} \times \Bigg(-\mathrm{e}^{-t}/right t) - \frac{10}{3} \times \left(-4\mathrm{e}^{-4t}\right)$$

$$f'(t) = -\frac{70}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{40}{3}\mathrm{e}^{-4t}$$

b. L'énoncé nous indique que la dérivée de f est négative sur $[0~;~+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
f	20 $\searrow$	0

3. **a.** Il est nécessaire de compléter jusqu'à la ligne 39.

`Ligne`	`t`	`f(t)`	`Condition f(t)>s`
Ligne 36	$3,6$	$0,64$	Vraie
Ligne 37	$3,7$	$0,58$	Vraie
Ligne 38	$3,8$	$0,52$	Vraie
Ligne 39	$3,9$	$0,47$	Fausse

b. À la fin de l'exécution de l'algorithme, la variable t a pour valeur $3,9$. Cela signifie que le tiroir est considéré comme fermé à partir de $3,9$ secondes.

4. Pour calculer $\int_0^4 f(t)$, il nous faut déterminer une primitive de f.

- e^{-t} se primitive en $-\mathrm{e}^{-t}$
- e^{-4t} se primitive en $-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-4t}$

On en déduit l'expression d'une primitive F de f :

$$f(t) = \frac{70}{3}\mathrm{e}^{-t} - \frac{10}{3}\mathrm{e}^{-4t}$$
$$F(t) = \frac{70}{3} \times (-\mathrm{e}^{-t}) - \frac{10}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4t}\right)$$
$$F(t) = -\frac{70}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{5}{6}\mathrm{e}^{-4t}$$

L'intégrale $\int_0^4 f(t)$ vaut $F(4) - F(0)$. Or :

- $F(4) = -\dfrac{70}{3}\mathrm{e}^{-4} + \dfrac{5}{6}\mathrm{e}^{-16}$
- $F(0) = -\dfrac{70}{3} \times 1 + \dfrac{5}{6} \times 1 = -\dfrac{140}{6} + \dfrac{5}{6} = -\dfrac{135}{6} = -\dfrac{45}{2}$

On en déduit que :

$$\int_0^4 f(t) = -\frac{70}{3}\mathrm{e}^{-4} + \frac{5}{6}\mathrm{e}^{-16} + \frac{45}{2}$$

Puis que :

$$m = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t) = \frac{1}{4}\left(-\frac{70}{3}\mathrm{e}^{-4} + \frac{5}{6}\mathrm{e}^{-16} + \frac{45}{2}\right)$$

En appliquant la règle de distributivité, on a :

$$m = -\frac{70}{12}\mathrm{e}^{-4} + \frac{5}{24}\mathrm{e}^{-16} + \frac{45}{8}$$

Après simplification de la fraction $\dfrac{70}{12}$, on obtient le résultat attendu :

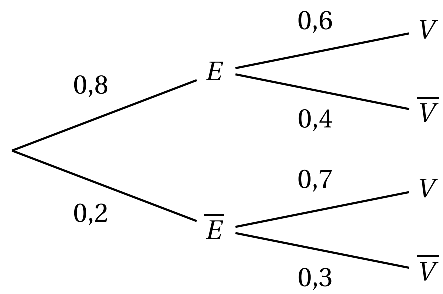
$$m = -\frac{35}{6}\mathrm{e}^{-4} + \frac{5}{24}\mathrm{e}^{-16} + \frac{45}{8}.$$

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante

On s'intéresse à un magasin de vélos.

Partie A. Probabilités conditionnelles



1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.
2. On a $p(E \cap V) = p(V) \times p_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$.
3. On a de même $p\left(\overline{E} \cap V\right) = p\left(\overline{E}\right) \times p_{\overline{E}}(V) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $p(V) = p(E \cap V) + p\left(\overline{E} \cap V\right) = 0,48 + 0,14 = 0,62$.
4. Il faut trouver $p_V(E) = \dfrac{p(V \cap E)}{p(V)} = \dfrac{p(E \cap V)}{p(V)} \dfrac{0,48}{0,62} \approx 0,7741$, soit 0,774 au millième près.

Partie B. Loi binomiale

1. La variaBle aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,62$.
2. On a $p(X = 40 = \binom{80}{40}0,62^{40} \times (1 - 0,62)^{80-40} = \binom{80}{40}0,62^{40} \times 0,38^{40} \approx 0,008$ au millième près.
3. On a $p(X \geqslant 41) = 1 - p(X < 40) \approx 0,981$ au au millième près.

Partie C. Intervalle de confiance

1. L'estimation ponctuelle f est égale à $\dfrac{54}{90} = \dfrac{6}{10} = 0,6$
2. **a.** L'intervalle de confiance est : $I = \left[0,6 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,6(1-0,6)}{90}}\ ;\ 0,6 + 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-0,6)}{90}}\right]$
   soit environ $I = [0,4987\ ;\ 0,7012]$.
   Au millième près $I = [0,498\ ;\ 0,702]$.

   b. La réponse est non car il y a un risque égal à 5 %