↜ Corrigé du baccalauréat – Terminale TMD ↝

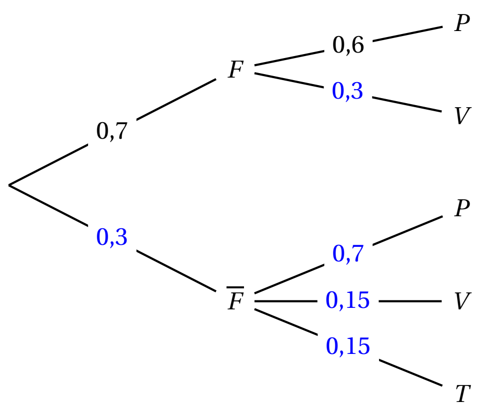
10 septembre 2019

EXERCICE 1 **6 points**

À un concours de musique, 70 % des candidats sont des filles. Les candidats choisissent de jouer au concours soit du piano, soit du violon, soit de la flûte traversière. Parmi les filles, 60 % jouent du piano et 30 % du violon. Parmi les garçons, 70 % jouent du piano et 15 % du violon.
On choisit au hasard un candidat à ce concours et on note :

- F l'évènement « le candidat est une fille » ;
- T l'évènement « le candidat joue de la flûte traversière » ;
- V l'évènement « le candidat joue du violon » ;
- P l'évènement « le candidat joue du piano ».

1. La situation de l'exercice est modélisée par l'arbre pondéré représenté ci-dessous :



2. D'après l'énoncé :

a. $P(F) = 0,7$

b. $P_F(P) = 0,6$

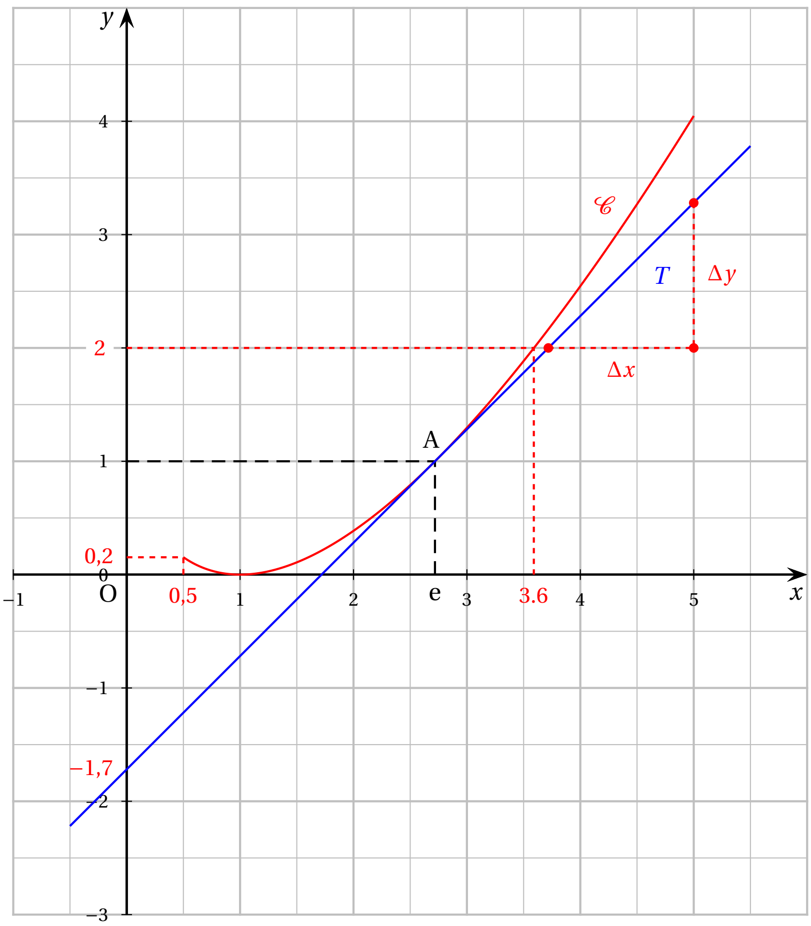
3. L'évènement $F \cap T$ est « le candidat est une fille ET le candidat joue de la flûte traversière ».
$P(F \cap T) = P(F) \times P_F(T) = 0,7 \times 0,1 = 0,07$.

4. D'après la formule des probabilités totales :
$P(T) = P(F \cap T) + P\left(\overline{F} \cap T\right) = P(F) \times P_F(T) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(T) = 0,07 + 0,3 \times 0,15 = 0,115$.

5. Sachant que le candidat joue de la flûte traversière, la probabilité que ce soit une fille est :
$P_T(F) = \dfrac{P(F \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,07}{0,115} \approx 0,61$.

EXERCICE 2 **7 points**

Dans cet exercice, on note ln *la fonction logarithme népérien. On rappelle que* $\ln(\mathrm{e}) = 1$.
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 5\right]$. On désigne par f' sa fonction dérivée.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ ci-dessous.
La droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $x = \mathrm{e}$.



1. Avec la précision permise par la lecture du graphique :

   a. $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}2$

   b. L'antécédent de 2 par f sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,5\right]$ est environ 3,6.

   c. L'ordonnée à l'origine de la droite T est environ $-1{,}7$.

   d. Le coefficient directeur de la droite T est voisin de 1.

2. On admet dans toute la suite de l'exercice que la fonction f est définie sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,5\right]$ par l'expression : $f(x) = x\ln(x) - x + 1$.
   On utilise la formule, pour a et b strictement positifs, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
   Donc $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2)$, et donc $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}$

3. Pour tout réel x de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\,5\right]$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 + 0 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.

4. On sait que pour $0 < x < 1$, on a $\ln(x) < 0$ et pour $x > 1$, on a $\ln(x) > 0$.
   $f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}15$; $f(1) = 0$ et $f(5) \approx 4$
   On établit le tableau des variations de la fonction f sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,5\right]$.

x	$\frac{1}{2}$			1			5
$f'(x) = \ln(x)$		$-$		0		$+$	
$f(x)$	$\approx 0{,}15$	$\searrow$		0		$\nearrow$	≈ 4

5. On complète le tableau des variations de la fonction f en plaçant le nombre 3 sur la ligne représentant $f(x)$:

x	$\frac{1}{2}$		1		α		5
$f(x)$	$\approx 0{,}15$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	≈ 4

On en déduit que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[1\,;\,5]$.

6. La tangente à la courbe représentant une fonction f au point de la courbe d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e a pour équation $y = f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$.
$f(x) = x\ln(x) - x + 1$ donc $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\ln(\mathrm{e}) - \mathrm{e} + 1 = \mathrm{e} - \mathrm{e} + 1 = 1$
$f'(x) = \ln(x)$ donc $f'(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) = 1$
La tangente T a pour équation $y = 1 \times (x - \mathrm{e}) + 1$ soit $y = x - \mathrm{e} + 1$.

EXERCICE 3 **Enseignement obligatoire** **7 points**

Rappels

- Dans la gamme de tempérament égal, l'octave est divisée en 12 demi-tons égaux séparant les notes : DO, DO#, RÉ, RÉ#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA, LA#, SI.
Quand on monte d'un demi-ton, la fréquence de la note, exprimées en hertz (Hz), est multipliée par $q = 2^{\frac{1}{12}}$.
- À chaque octave est associée un entier naturel n appelé indice et les notes d'une octave portent l'indice de cette octave. Ainsi le LA_3 (le LA du diapason) correspond à la note LA de l'octave d'indice 3, le LA_4 correspond à la note LA de l'octave d'indice 4 située au-dessus de l'octave d'indice 3.
La fréquence de LA_3 est 440 Hz.
- Si un son possède une intensité sonore I (exprimée en W.m^{-2}), son niveau sonore est exprimé en décibels (dB) par :

$$N(I) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{où } I_0 = 10^{-12}\text{W.m}^{-2} \text{ et log désigne la fonction logarithme décimal.}$$

- On rappelle que les intensités sonores s'ajoutent.
- Pour deux notes de fréquences respectives f_1 et f_2, avec $f_2 \geqslant f_1$, la différence de hauteur de ces notes, exprimée en savarts, est égale à $1\,000\log\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$.
- Une quarte juste contient cinq demi-tons. Une quinte juste en contient sept.

1. a. À partir du LA_3 , on monte de trois quartes justes ; on monte donc de $3 \times 5 = 15$ demi-tons.

$$\overbrace{\dots\ \text{LA LA\# SI}}^{\text{octave 3}}\quad \overbrace{\text{DO DO\# RÉ RÉ\# MI FA FA\# SOL SOL\# LA LA\# SI}}^{\text{octave 4}}\quad \overbrace{\text{DO DO\#}\ \dots}^{\text{octave 5}}$$

$$\text{LA} \xrightarrow{+15} \text{DO\#}$$

La note obtenue est donc le DO_5.

b. La fréquence du LA_3 est de 440 Hz.
Quand on monte d'un demi-ton, la fréquence est multipliée par $2^{\frac{1}{12}}$, donc elle est multipliée par $\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{15}$ quand on monte de quinze demi-tons.
La fréquence du DO_5 est donc en hertz de $440 \times \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{15}$ soit $1\,047$ en arrondissant à l'unité.

c. La différence de hauteur, exprimée en savarts, entre le LA_3 (de fréquence 440 Hz), et le DO_5 (de fréquence $440 \times \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{15}$ Hz) est $1\,000\log\left(\dfrac{440 \times \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{15}}{440}\right) = 1\,000\log\left(\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{15}\right)$ soit 376 en arrondissant à l'unité.

2. On admet que l'intensité sonore moyenne d'une guitare classique est égale à $3{,}2\times 10^{-5}$ W.m^{-2}.
Le niveau sonore moyen d'une guitare classique est, en décibels,
$N\left(3{,}2\times 10^{-5}\right) = 10\log\left(\dfrac{3{,}2\times 10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 10\log\left(3{,}2\times 10^{7}\right)$ soit 75 en arrondissant à l'unité.

3. On admet que le niveau sonore moyen d'une clarinette est de 90 dB.
L'intensité sonore moyenne d'une clarinette est le nombre I tel que $N(I) = 90$.
$N(I) = 90 \iff 10\log\left(\dfrac{I}{10^{-12}}\right) = 90 \iff \log\left(I\times 10^{12}\right) = 9 \iff I\times 10^{12} = 10^{9} \iff I = 10^{-3}$
L'intensité sonore moyenne d'une clarinette est égale à 10^{-3} W.m^{-2}.

4. On admet que l'intensité sonore moyenne d'un trombone est égale à $3{,}2\times 10^{-3}$ W.m^{-2}.
Léa affirme qu'un pupitre de 8 clarinettes jouant ensemble, joue avec le même niveau sonore moyen qu'un pupitre de 3 trombones jouant ensemble.
Les intensités sonores s'ajoutent donc l'intensité sonore de 3 trombones est de $3\times 3{,}2\times 10^{-3} = 9{,}6\times 10^{-3}$ W.m^{-2}, et l'intensité sonore de 8 clarinettes est de 8×10^{-3} W.m^{-2}.
Les intensités sonores sont différentes donc les niveaux sonores seront différents ; Léa a tort.

EXERCICE 4 **Enseignement enforcé** **7 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.
On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives z_{A}, z_{B} et z_{C} définis par :

$$z_{\text{A}} = \sqrt{3} - \text{i},\quad z_{\text{B}} = 3\text{i}\quad \text{et}\quad z_{\text{C}} = z_{\text{A}}\times z_{\text{B}}.$$

1. **a.** On place le point B dans le repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. Voir graphique.

b. $z_{\text{B}} = 3\text{i}$. Or i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ donc $z_{\text{B}} = 3\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}$.

2. **a.** $z_{\text{A}} = \sqrt{3} - \text{i}$ donc $|z_{\text{A}}| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$
$z_{\text{A}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}\right)$
On cherche un réel θ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = -\dfrac{1}{2}$; le réel $-\dfrac{\pi}{6}$ convient.
Donc $z_{\text{A}} = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

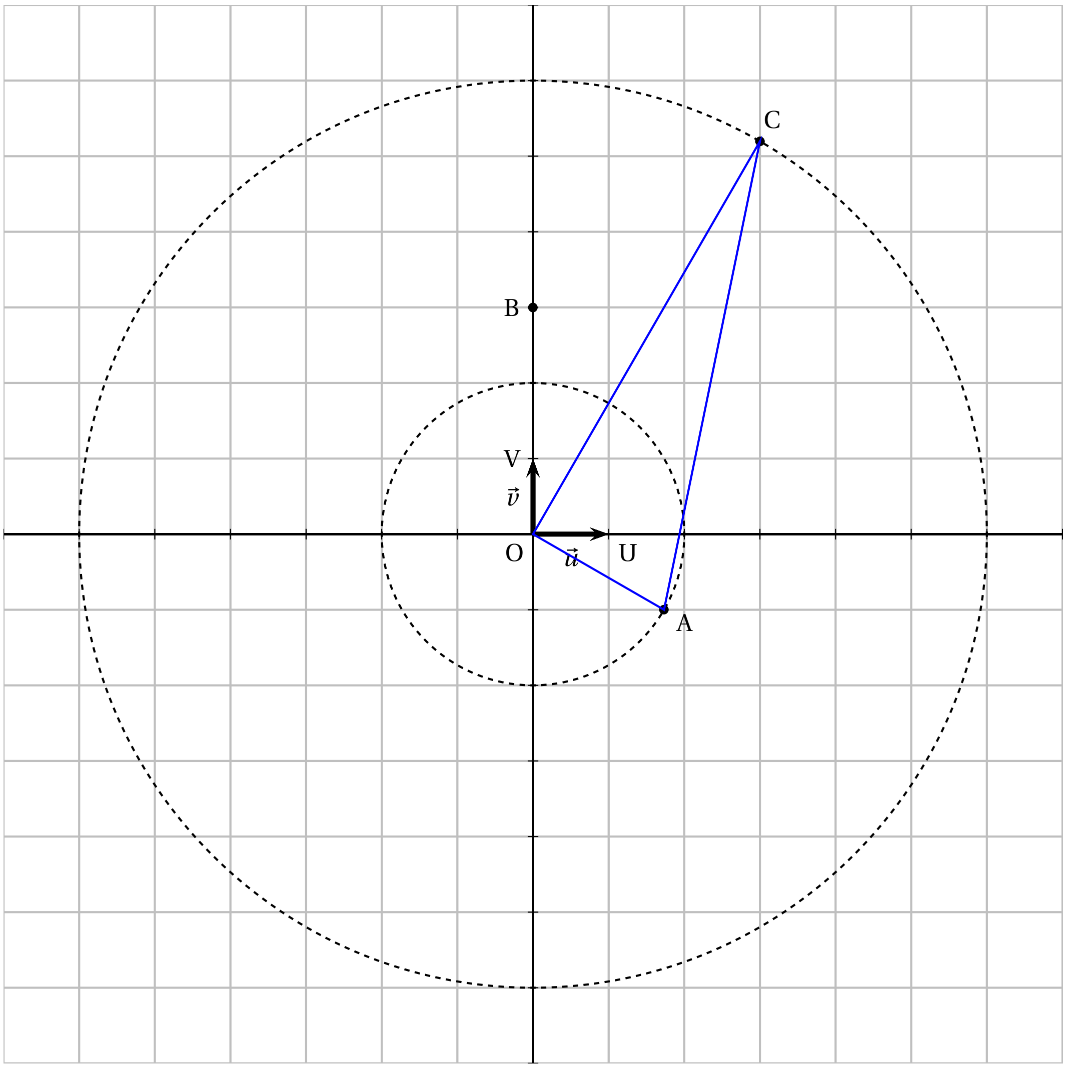
b. Le point A est le point du cercle de centre O et de rayon 2, d'ordonnée -1 et d'abscisse positive. Voir graphique.

3. **a.** $z_{\text{C}} = z_{\text{A}}\times z_{\text{B}} = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}\times 3\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}} = 6\text{e}^{\text{i}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)} = 6\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$

b. $z_{\text{C}} = z_{\text{A}}\times z_{\text{B}} = \left(\sqrt{3}-\text{i}\right)\times(3\text{i}) = 3 + 3\text{i}\sqrt{3}$; de plus on sait que $|z_{\text{C}}| = 6$.
Le point C est donc le point du cercle de centre O et de rayon 6, d'abscisse égale à 3 et d'ordonnée positive. Voir graphique.

c. Soit U le point tel que $\overrightarrow{\text{OU}} = \vec{u}$.
$z_{\text{A}} = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}$ donc $\widehat{\text{AOU}} = \dfrac{\pi}{6}$ et $z_{\text{C}} = 2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ donc $\widehat{\text{UOC}} = \dfrac{\pi}{3}$
$\widehat{\text{AOC}} = \widehat{\text{AOU}} + \widehat{\text{UOC}} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$ donc le triangle AOC est rectangle en O.

d. $\text{OA} = |z_{\text{A}}| = 2$ et $z_{\text{C}} = 6\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$ donc $\text{OC} = |z_{\text{C}}| = 6$
Le triangle AOC est rectangle en O donc, d'après le théorème de Pythagore,
$\text{AC}^2 = \text{OA}^2 + \text{OC}^2 = 4 + 36 = 40$.
Donc $\text{AC} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$


C
B
V
$\vec{v}$
O
$\vec{u}$
U
A