BTS Métropole 15 mai 2023

Groupement B3 [1]

Durée : 3 heures

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé
L'usage de calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé

Exercice 1 **10 points**

Partie A – Résolution d'une équation différentielle

1. **a.** Résolvons $r^2+5r+4=0$.

$$\Delta = 5^2-4\times 1\times 4=25-16=9$$

Les solutions sont :

$$r_1=\frac{-5-\sqrt{9}}{2\times 1}=-4 \text{ et } r_2=\frac{-5+\sqrt{9}}{2\times 1}=-1.$$

b. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont de la forme :

$$C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-4t} \text{ où } C_1, C_2\in\mathbb{R}$$

2. **a.** On a $f(0)=20$ et $f'(0)=-10$.

b. La valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture est :

$$f(2)=\frac{70}{3}\mathrm{e}^{-2}-\frac{10}{3}\mathrm{e}^{-8}$$

Attention, on demande dans cette question une valeur exacte, et non une valeur approchée.

c) Demandons-nous quelle est la distance OM au bout de quatre secondes :

$$f(4)=\frac{70}{3}\mathrm{e}^{-4}-\frac{10}{3}\mathrm{e}^{-16}\simeq 0,43 \text{ cm.}$$

Cette distance est inférieure à 0,5 cm, on peut donc considérer que le tiroir est fermé.

Partie B – Étude de fonction

1. **a.** Le rappel nous permet d'affirmer que $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-4t}=0$.
On en déduit que

$$\lim_{t\to+\infty}f(t)=\frac{70}{3}\times 0-\frac{10}{3}\times 0=0$$

b. La courbe possède ainsi une asymptote d'équation $y=0$.

1. Systèmes photoniques

2. **a.** e^{-t} et e^{-4t} se dérivent respectivement en $-\mathrm{e}^{-t}$ et $-4\mathrm{e}^{-4t}$. Ainsi :

$$f'(t) = \frac{70}{3} \times \left(-\mathrm{e}^{-t}\right) - \frac{10}{3} \times \left(-4\mathrm{e}^{-4t}\right)$$
$$f'(t) = -\frac{70}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{40}{3}\mathrm{e}^{-4t}$$

b. L'énoncé nous indique que la dérivée de f est négative sur $[0~;~+\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
f	20	$\searrow$	0

3. **a.** Il est nécessaire de compléter jusqu'à la ligne 39.

`Ligne`	`t`	`f(t)`	`Condition f(t)>s`
Ligne 36	3,6	0,64	Vraie
Ligne 37	3,7	0,58	Vraie
Ligne 38	3,8	0,52	Vraie
Ligne 39	3,9	0,47	Fausse

b. À la fin de l'exécution de l'algorithme, la variable t a pour valeur 3,9. Cela signifie que le tiroir est considéré comme fermé à partir de 3,9 secondes.

4. Pour calculer $\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t$, il nous faut déterminer une primitive de f.

- e^{-t} se primitive en $-\mathrm{e}^{-t}$
- e^{-4t} se primitive en $-\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-4t}$

On en déduit l'expression d'une primitive F de f :

$$f(t) = \frac{70}{3}\mathrm{e}^{-t} - \frac{10}{3}\mathrm{e}^{-4t}$$
$$F(t) = \frac{70}{3} \times \left(-\mathrm{e}^{-t}\right) - \frac{10}{3} \times \left(-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4t}\right)$$
$$F(t) = -\frac{70}{3}\mathrm{e}^{-t} + \frac{5}{6}\mathrm{e}^{-4t}$$

L'intégrale $\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t$ vaut $F(4) - F(0)$. Or :

- $F(4) = -\dfrac{70}{3}\mathrm{e}^{-4} + \dfrac{5}{6}\mathrm{e}^{-16}$
- $F(0) = -\dfrac{70}{3} \times 1 + \dfrac{5}{6} \times 1 = -\dfrac{140}{6} + \dfrac{5}{6} = -\dfrac{135}{6} = -\dfrac{45}{2}$

On en déduit que :

$$\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t = -\frac{70}{3}\mathrm{e}^{-4} + \frac{5}{6}\mathrm{e}^{-16} + \frac{45}{2}$$

Puis que :

$$m = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(-\frac{70}{3}\mathrm{e}^{-4} + \frac{5}{6}\mathrm{e}^{-16} + \frac{45}{2}\right)$$

En appliquant la règle de distributivité, on a :

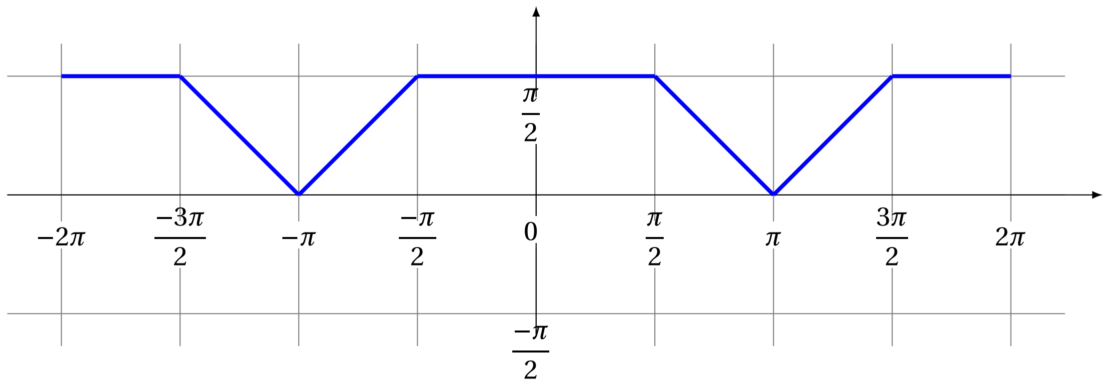
$$m = -\frac{70}{12}\mathrm{e}^{-4} + \frac{5}{24}\mathrm{e}^{-16} + \frac{45}{8}$$

Après simplification de la fraction $\dfrac{70}{12}$, on obtient le résultat attendu :

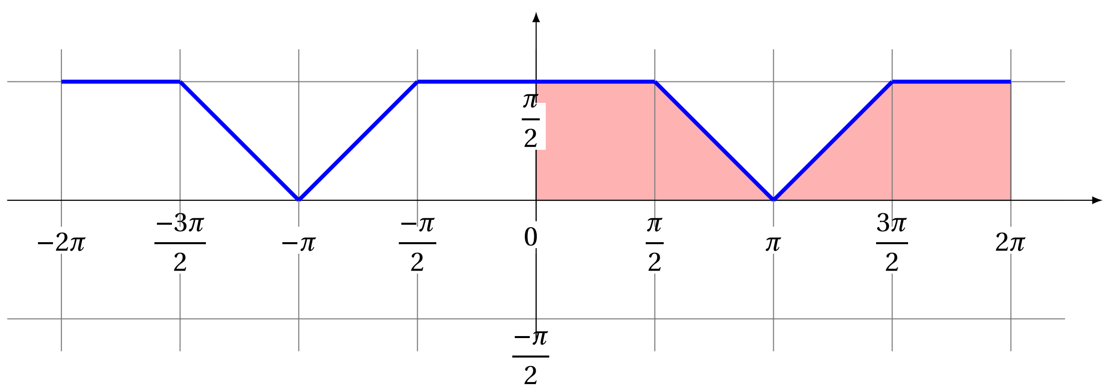
$$m = -\frac{35}{6}\mathrm{e}^{-4} + \frac{5}{24}\mathrm{e}^{-16} + \frac{45}{8}.$$

Exercice 2

1. La représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$ est :



2. $b_n = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$ car la fonction f est paire.
3. $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$
4. Par définition, $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$. L'intégrale représente l'aire sous la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.



Cette aire, en recomposant les différents éléments, est la somme des aires de trois carrés de côté $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \times 3 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2}$$
$$a_0 = \frac{3 \times \pi \times \pi}{2 \times \pi \times 2 \times 2}$$
$$a_0 = \frac{3\pi}{8}$$

5. Soit $n \geqslant 1$. Pour calculer a_n, on utilise la formule fournie dans le formulaire pour les fonctions paires :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{2\pi}\int_0^{2\pi/2} f(t)\cos(n\times 1\times t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

La fonction f étant définie différemment sur les intervalles $[0;\pi/2]$ et $[\pi/2;\pi]$, il est naturel de découper l'intégrale :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{2}\times\cos(nt)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\times\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\
a_n &= \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

6. L'énoncé fournit la formule $a_n = \dfrac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$

- $a_1 = \dfrac{2}{\pi\times 1^2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \cos(\pi)\right) = \dfrac{2}{\pi}(0-(-1)) = \dfrac{2}{\pi}\times 1 = \dfrac{2}{\pi}$
- $a_2 = \dfrac{2}{\pi\times 2^2}\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{2}\right) - \cos(2\pi)\right) = \dfrac{2}{4\pi}(\cos(\pi)-\cos(2\pi)) = \dfrac{1}{2\pi}(-1-1) = \dfrac{1}{2\pi}\times(-2) = -\dfrac{1}{\pi}$
- $a_3 = \dfrac{2}{\pi\times 3^2}\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) - \cos(3\pi)\right) = \dfrac{2}{9\pi}(0-(-1)) = \dfrac{2}{9\pi}\times 1 = \dfrac{2}{9\pi}$

7. Par définition :

$$s_3(t) = a_0 + a_1\cos(1t) + b_1\sin(1t) + a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t) + a_3\cos(3t) + b_3\sin(3t)$$

En remplaçant les coefficients connus par leurs valeurs exactes, on obtient :

$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) + 0\sin(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + 0\sin(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t) + 0\sin(3t).$$

En enlevant les termes nuls, on a finalement :

$$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

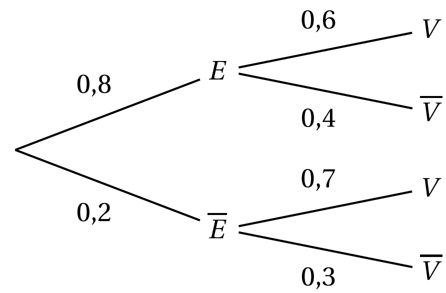
8. Un tracé sur la calculatrice indique rapidement que la réponse est la courbe 3.

Exercice 3 **10 points**

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante

On s'intéresse à un magasin de vélos.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.



2. On a $p(E \cap V) = p(V) \times p_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$.
3. On a de même $p\left(\overline{E} \cap V\right) = p\left(\overline{E}\right) \times p_{\overline{E}}(V) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$.

   D'après la formule des probabilités totales :

   $p(V) = p(E \cap V) + p\left(\overline{E} \cap V\right) = 0,48 + 0,14 = 0,62$.
4. Il faut trouver $p_V(E) = \dfrac{p(V \cap E)}{p(V)} = \dfrac{p(E \cap V)}{p(V)} \dfrac{0,48}{0,62} \approx 0,7741$, soit 0,774 au millième près.

Formulaire sur les séries de Fourier

f est une fonction périodique de période T et de pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Développement en série de Fourier de la fonction f :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right].$$

$$s_n(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right].$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n \geqslant 1).$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n \geqslant 1).$$

→ Lorsque la fonction f est paire, on a :

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \quad (n \geqslant 1).$$

DOCUMENT-RÉPONSE

(À rendre avec la copie)

EXERCICE 2

Question 1.