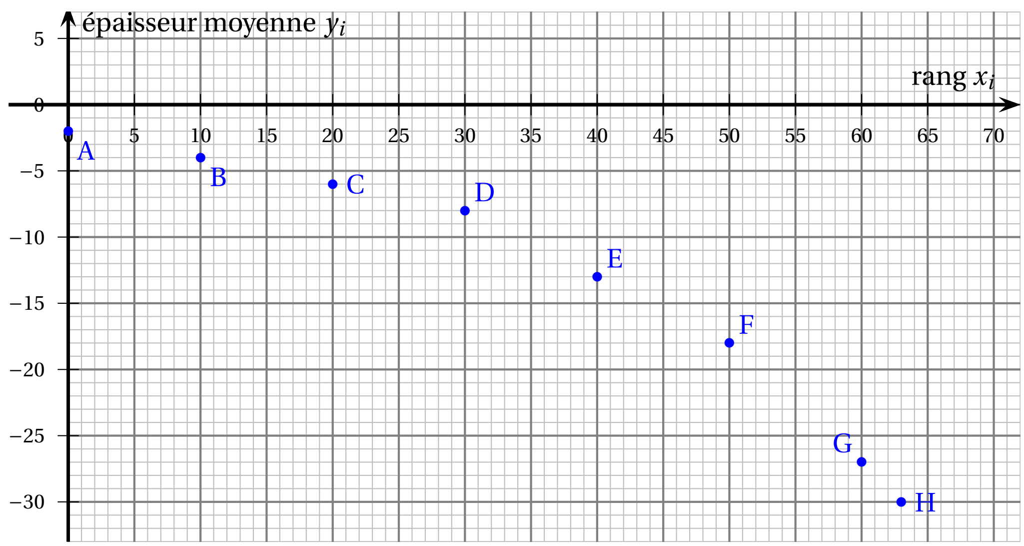
Corrigé du BTS Groupement C1 – 16 mai 2025

Exercice 1 — 10 points

On s'intéresse à l'évolution de l'épaisseur moyenne des glaciers au niveau mondial.
Le tableau ci-dessous donne les variations en mètre de l'épaisseur moyenne de tous les glaciers par rapport à 1956, année de référence. Le rang 0 correspond à l'année 1960.

Année	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020	2023
Rang x_i	0	10	20	30	40	50	60	63
Épaisseur y_i (en mètre)	-2	-4	-6	-8	-13	-18	-27	-30

Le graphique ci-dessous représente le nuage de points correspondant aux données du tableau.



Partie A - Première modélisation

1. Les points du graphique ne sont pas alignés, même à peu près, donc un ajustement affine de y en x n'est pas approprié.
2. Pour chaque épaisseur x_i, on pose $z_i = \ln(-y_i)$. On a donc :

Rang x_i	0	10	20	30	40	50	60	63
Épaisseur y_i (en mètre)	-2	-4	-6	-8	-13	-18	-27	-30
z_i	0,693	1,386	1,792	2,079	2,565	2,890	3,296	3,401

3. On détermine, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x en arrondissant les coefficients à 10^{-3}.
   On trouve à la calculatrice : $z = 0,041x + 0,867$.

4. $z = 0{,}041x + 0{,}867$ donc $\ln(-y) = 0{,}041x + 0{,}867$ donc $-y = \mathrm{e}^{0{,}041x+0{,}867}$
donc $y = -\mathrm{e}^{0{,}041x} \times \mathrm{e}^{0{,}867}$. Or $\mathrm{e}^{0{,}867} \approx 2{,}38$ donc on a : $y = -2{,}38\,\mathrm{e}^{0{,}041x}$.
5. L'année 2030 correspond à $x = 70$. Pour $x = 70$, on a $y = -2{,}38\,\mathrm{e}^{0{,}041\times 70} \approx -42$.
Avec ce modèle, l'épaisseur moyenne perdue par les glaciers en 2030 peut être estimée à 42 m.

Partie B - Deuxième modélisation

On suppose dans cette partie que l'évolution de l'épaisseur moyenne (en mètre) des glaciers par rapport à 1956 peut être modélisée par une fonction g du temps x, exprimé en année, qui vérifie l'équation différentielle suivante : (E) $\qquad y' - 0{,}041y = 0$.

1. L'équation différentielle $y' + ay = 0$ a pour solutions les fonctions définies par $y(t) = k\,\mathrm{e}^{-ax}$, où $k \in \mathbb{R}$, donc l'équation différentielle $y' - 0{,}041y = 0$ a pour solutions les fonctions définies par $y(t) = k\,\mathrm{e}^{0{,}041x}$, où $k \in \mathbb{R}$.
2. $g(30) = -8$ donc $k\,\mathrm{e}^{0{,}041\times 30} = -8$ donc $k = \dfrac{-8}{\mathrm{e}^{1{,}23}}$ donc $k \approx -2{,}338$
On a donc $g(t) = -2{,}338\,\mathrm{e}^{0{,}041x}$.
3. Avec ce modèle, pour estimer au cours de quelle année l'épaisseur moyenne aura diminué de 50 m par rapport à 1956, on cherche le plus petit x tel $g(x) \leqslant -50$.
On résout cette inéquation.
$$g(x) \leqslant -50 \iff -2{,}338\,\mathrm{e}^{0{,}041x} \leqslant -50 \iff \mathrm{e}^{0{,}041x} \geqslant \frac{-50}{-2{,}338}$$
$$\iff 0{,}041x \geqslant \ln\left(\frac{-50}{-2{,}338}\right) \iff x \geqslant \frac{\ln\left(\frac{50}{2{,}338}\right)}{0{,}041}$$
$\dfrac{\ln\left(\frac{50}{2{,}338}\right)}{0{,}041} \approx 74{,}7$ donc on pour $x = 74$ qui correspond à l'année 2034, on a une diminution inférieure à 50 m, et pour $x = 75$ -en 2035), on a une diminution supérieure à 50 m. C'est donc au cours de l'année 2034 que l'épaisseur moyenne aura diminué de 50 m par rapport à 1956.

Partie C - Étude de fonction

On suppose dans cette partie que l'évolution de l'épaisseur moyenne (en mètre) des glaciers par rapport à 1956 en fonction du temps x en année ($x = 0$ représentant l'année 1960) peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = -2{,}3\,\mathrm{e}^{0{,}04x}$.

1. **a.** Pour x appartenant à $[0\,;+\infty[$, on a : $f'(x) = -2{,}3 \times 0{,}04\,\mathrm{e}^{0{,}04x} = -0{,}092\,\mathrm{e}^{0{,}04x}$.
   b. Pour tout réel X, $\mathrm{e}^X > 0$ donc $f'(x) < 0$ sur $[0\,;+\infty[$.
   La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
   c. L'épaisseur des glaciers diminue donc la fonction f est décroissante ; c'est cohérent.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}04x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{0{,}04x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, ce qui n'est pas possible car la diminution de la hauteur du glacier est forcément finie (sa diminution maximale étant sa hauteur au départ).

Exercice 2 — 10 points

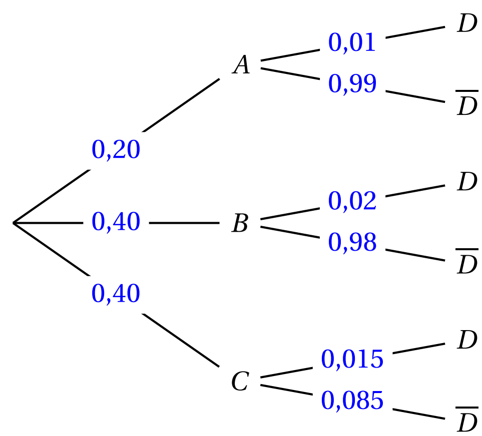
Une entreprise réalise des forets (tiges métalliques pour percer le béton). Elle possède trois machines, nommées A, B et C, réglées pour fabriquer des forets de diamètre 10 mm et de longueur 110 mm.

Partie A - Probabilités conditionnelles

La machine A fabrique 20 % de la production de l'entreprise et les machines B et C fabriquent chacune 40 % de la production de l'entreprise.
On considère que 1 % des forets fabriqués par la machine A sont défectueux, ainsi que respectivement 2 % et 1,5 % des forets fabriqués par les machines B et C.
On choisit un foret au hasard dans l'ensemble de la production.

- A est l'évènement « le foret provient de la machine A ».
- B est l'évènement « le foret provient de la machine B ».
- C est l'évènement « le foret provient de la machine C ».
- D est l'évènement « le foret est défectueux ».
- $\overline{D}$ est l'évènement « le foret n'est pas défectueux ».

1. On complète l'arbre.



2. $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0;20 \times 0,01 = 0,002$
3. D'après la formule des probabilités totales :
$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) = 0,002 + 0,40 \times 0,02 + 0,40 \times 0,015$$
$$= 0,002 + 0,008 + 0,006 = 0,016$$
4. La probabilité qu'un foret provienne de la machine B sachant qu'il est défectueux est
$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,008}{0,016} = 0,5$$

Partie B - Contrôle de conformité

On admet dans cette partie que la probabilité de choisir au hasard dans le stock de l'entreprise un foret défectueux est de 0,016.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 forets choisis au hasard dans le stock de l'entreprise, associe le nombre de forets défectueux dans ce prélèvement. On admet que le stock est suffisamment grand pour assimiler chaque prélèvement à 100 tirages successifs avec remise d'un foret du stock. On choisit au hasard un prélèvement de 100 forets.

1.
   - Pour un foret, il n'y a que deux possibilités : il est défectueux, avec une probabilité $p = 0{,}016$, ou il ne l'est pas, avec une probabilité de $1 - p$.
   - On choisit au hasard un échantillon de $n = 100$ forets et on admet que le stock est suffisamment grand pour assimiler chaque prélèvement à 100 tirages successifs avec remise d'un foret du stock.

   Donc la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 forets choisis au hasard dans le stock de l'entreprise, associe le nombre de forets défectueux dans ce prélèvement suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}016$.
2. La probabilité de n'avoir aucun foret défectueux dans ce prélèvement est :
   $P(X = 0) = \binom{100}{0} \times 0{,}016^0 \times (1 - 0{,}016)^{100-0} = 0{,}984^{100} \approx 0{,}1993$, soit 0,199 au millième près.
3. La probabilité qu'il y ait au plus deux forets défectueux dans ce prélèvement est :
   $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}784$ (à la calculatrice)

Partie C - Contrôle du diamètre

On s'intéresse au diamètre des forets fabriqués par la machine B. On admet que la variable aléatoire Y donnant le diamètre d'un foret (en millimètre) pris au hasard dans la production de la machine B suit une loi normale de paramètre $\mu = 10$ et $\sigma = 0{,}02$. L'entreprise estime qu'un foret peut être commercialisé lorsque son diamètre est compris entre 9,95 mm et 10,05 mm.
La probabilité qu'un foret choisi au hasard dans la production de la machine B puisse être commercialisé est : $P(9{,}95 \leqslant Y \leqslant 10{,}05) \approx 0{,}988$ (à la calculatrice)

Partie D - Test d'hypothèse

L'entreprise considère qu'une machine est correctement réglée lorsque le diamètre moyen des forets produits par cette machine est égal à 10 millimètres. Suite à la maintenance de la machine C, l'entreprise se demande si cette machine est toujours correctement réglée.
Le responsable qualité construit pour cela un test d'hypothèse bilatéral au seuil d'erreur de 5 %.
On désigne par $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 50 forets prélevés au hasard dans la production de la machine C, associe la moyenne, en millimètre, des diamètres des forets de cet échantillon.

On suppose que le nombre de forets est suffisamment élevé pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On admet que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma = 0{,}009$.
L'hypothèse nulle H_0 est donc « $m = 10$ ».

1. L'hypothèse alternative H_1 est « $m \neq 10$ ».
2. Sous l'hypothèse H_0, on cherche une valeur arrondie à 10^{-3} du réel h tel que :
   $P(10 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 10 + h) \approx 0{,}95$.
   On sait que si une variable aléatoire T suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma\right)$, on a :
   $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$.
   Donc en prenant $h = 2\sigma = 2 \times 0{,}009 = 0{,}018$, on aura : $P(10 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 10 + h) \approx 0{,}95$.
3. On prélève un échantillon de 50 forets et on obtient un diamètre moyen de 9,97 mm.
   $\left[10 - h\,;\,10 + h\right] = \left[10 - 0{,}018\,;\,10 + 0{,}018\right] = \left[9{,}982\,;\,10{,}018\right]$
   Or $9{,}97 \not\in \left[9{,}982\,;\,10{,}018\right]$ donc on ne peut pas, au seuil de 5 %, conclure que la machine C est correctement réglée.