∽ Corrigé du Brevet de technicien supérieur Métropole ∽
15 mai 2023 - Comptabilité et gestion [1]

Exercice 1 **10 points**

On s'intéresse à deux aspects des services de communication mobiles en France.

Partie A : Données consommées sur les réseaux mobiles en France

Le tableau ci-dessous donne le volume total en exaoctets, noté Eo (1 exaoctet = 10^{18} octets), des données consommées sur les réseaux mobiles pour la période 2017–2021.

Année	2017	2018	2019	2020	2021
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4
Volume de données y_i (en Eo)	2,20	3,64	5,24	7,13	8,66

(*source : ARCEP* 2022)

1. La droite de régression obtenue par un ajustement affine de y en fonction de x selon la méthode des moindres carrés a pour équation : $y = 1{,}641x + 2{,}092$.
2. On décide d'ajuster le nuage de points de cette série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ par la droite d'équation : $y = 1{,}6x + 2{,}1$.

   a. 2022 correspond au rang 5 ; pour $x = 5$, on a $y = 1{,}6 \times 5 + 2{,}1 = 10{,}1$.
   Le volume total des données consommées en 2022 peut être estimé à 10,1 Eo.

   b. On cherche x pour que $y > 15$:
   $1{,}6x + 2{,}1 > 15 \iff 1{,}6x > 12{,}9 \iff x > \dfrac{12{,}9}{1{,}6}$
   Or $\dfrac{12{,}9}{1{,}6} \approx 8{,}06$ donc on prendra $x = 9$. Le rang 9 correspond à l'année 2026, donc c'est à partir de 2026 que le volume total des données dépassera 15 Eo.

Partie B : Nombre de SMS émis en France

Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de calcul d'un tableur, donne le nombre de milliards de SMS émis chaque année en France pour la période 2017-2021.
Les cellules de la ligne 3 sont au format pourcentage à deux décimales.

	A	B	C	D	E	F
1	Année	2017	2018	2019	2020	2021
2	Nombre de SMS émis (en milliards)	184,5	171,3	159,9	136,5	119,6
3	Taux d'évolution par rapport à l'année 2017 (en %)					

(*source : ARCEP* 2022)

1. Candidats libres ou établissement privé hors contrat

1. La formule à saisir en C3 qui permet, par recopie vers la droite, de calculer les taux d'évolution du nombre de SMS émis chaque année par rapport à l'année 2017 est :
`=(C2 - $B$2)/$B$2`

2. $\dfrac{119{,}6-184{,}5}{184{,}5} \approx -35{,}18$ donc sur la période 2017 à 2021, le nombre de SMS émis a diminué d'environ 35,2 %.

3. Entre 2017 et 2021 on passe de 184,5 à 119,6 milliards de SMS, ce qui fait un coefficient d'évolution de $\dfrac{119{,}6}{184{,}5}$.

Par année, le coefficient moyen d'évolution est donc de $\left(\dfrac{119{,}6}{184{,}5}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Cela correspond à une diminution moyenne en pourcentage de $\left(1-\left(\dfrac{119{,}6}{184{,}5}\right)^{\frac{1}{4}}\right)\times 100$, soit environ 10,27.

4. La suite (u_n) modélise le nombre de milliards de SMS émis pour l'année $(2021+n)$. On a ainsi : $u_0 = 119{,}6$. On suppose qu'à partir de l'année 2021, le nombre u_n de SMS émis diminue chaque année de 10,3 %.

a. En arrondissant à 0,1 milliard près :
$u_1 = u_0 - u_0 \times \dfrac{10{,}3}{100} = 119{,}6 - 119{,}6 \times \dfrac{10{,}3}{100} = 107{,}3$ et
$u_2 = u_1 - u_1 \times \dfrac{10{,}3}{100} = 107{,}3 - 107{,}3 \times \dfrac{10{,}3}{100} = 96{,}2$.
D'après ce modèle, on peut estimer à 107,3 milliards le nombre de SMS émis en 2022, et à 96,2 le nombre de SMS émis en 2023.

b. Diminuer de 10,3 %, c'est multiplier par $1-\dfrac{10{,}3}{100}$ soit 0,897. La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = 0{,}897$ et de premier terme $u_0 = 119{,}6$.

c. On déduit de la question précédente que, pour tout n :
$u_n = u_0 \times q^n = 119{,}6 \times 0{,}897^n$.

d. $2027 = 2021+6$ donc, d'après ce modèle, le nombre de SMS émis en 2027 serait :
$u_6 = 119{,}6 \times 0{,}897$, soit 62,3 en arrondissant à 0,1 milliard près.

e. D'après ce modèle, le nombre de SMS émis passera pour la première fois sous les 50 milliards quand $u_n < 50$; on résout cette inéquation :

$$u_n < 50 \iff 119{,}6\times 0{,}897^n < 50 \iff 0{,}897^n < \dfrac{50}{119{,}6} \iff \ln\left(0{,}897^n\right) < \ln\left(\dfrac{50}{119{,}6}\right)$$

$$\iff n\times\ln(0{,}897) < \ln\left(\dfrac{50}{119{,}6}\right) \iff n > \dfrac{\ln\left(\frac{50}{119{,}6}\right)}{\ln(0{,}897)}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{50}{119{,}6}\right)}{\ln(0{,}897)} \approx 8{,}02$ donc c'est à partir de $n = 9$ que le nombre de SMS émis passera pour la première fois sous les 50 milliards, soit en 2030.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes

On s'intéresse à la production d'un producteur de noix (nuciculteur) du Périgord.

Partie A : Probabilités conditionnelles

Pour ce nuciculteur, 62 % des noix récoltées sont de la variété « Franquette », 27 % des noix récoltées sont de la variété « Corne » et le reste sont des noix de la variété « Marbot »,
Une étude statistique a montré que 3 % des noix de la variété « Franquette », 4 % des noix de la variété « Corne »et 2 % des noix de la variété « Marbot « sont vides quand elles sont récoltées.
On choisit une noix au hasard dans la récolte de ce nuciculteur. Toutes les noix ont la même probabilité d'être choisies.
On s'intéresse alors aux évènements suivants :

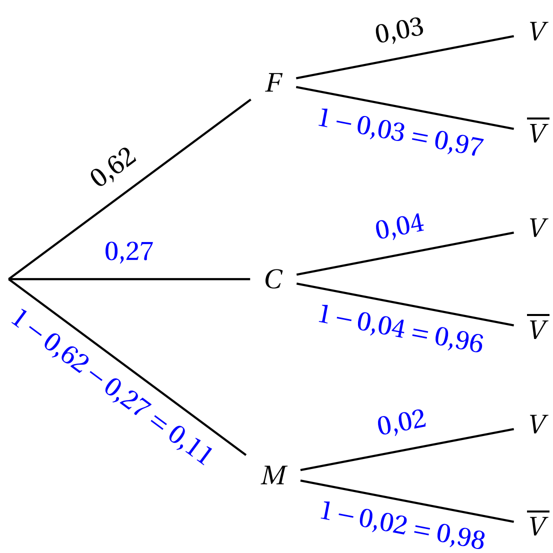
— F : la noix est de la variété « Franquette »

— C : la noix est de la variété « Corne »

— M : la noix est de la variété « Marbot »

— V : la noix est vide ; $\overline{V}$ est l'évènement contraire de V.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. **a.** La probabilité que la noix soit de la variété « Franquette » et qu'elle soit vide est : $P(F \cap V) = P(F) \times P_F(V) = 0,62 \times 0,03 = 0,018\,6$.

b. $P\left(F \cap \overline{V}\right) = P(F) \times P_F\left(\overline{V}\right) = 0,62 \times 0,97 = 0,601\,4$

C'est la probabilité que la noix soit de la variété « Franquette » et qu'elle ne soit pas vide.

3. D'après la formule des probabilités totales :

$P(V) = P(F \cap V) + P(C \cap V) + P(M \cap V) = 0,018\,6 + 0,27 \times 0,04 + 0,11 \times 0,02 = 0,031\,6.$

4. On suppose que la noix choisie n'est pas vide.

L'arrondi à 0,001 de la probabilité qu'elle soit de la variété « Corne » est :

$P_{\overline{V}}(C) = \dfrac{P\left(C \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \dfrac{0,27 \times 0,96}{1 - 0,0316} \approx 0,268.$

Partie B : Loi binomiale

On prélève au hasard 100 noix dans la récolte de ce nuciculteur.
La quantité de noix est assez grande pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 noix dans la récolte de ce nuciculteur, associe le nombre de noix vides.
On admet que la probabilité pour qu'une noix soit vide est égale à 0,03.

1. On est dans le cas d'une répétition dans des conditions identiques d'une expérience qui n'a que deux issues; la variable aléatoire X qui compte le nombre de « succès », c'est-à-dire le nombre de noix vides, suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,03$.

2. L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = np = 100 \times 0,03 = 3$.

On peut estimer que sur un lot de 100 noix, il y en a en moyenne 3 qui sont vides.

3. $P(X = 0) = \dbinom{100}{0} \times 0,03^0 \times (1 - 0,03)^{100-0} = 0,97^{100} \approx 0,048$

C'est la probabilité que le lot ne contienne aucune noix vide.

4. D'après la calculatrice $P(X \leqslant 3) \approx 0,647$.

5. La probabilité pour que, dans un tel prélèvement, au moins quatre noix soient vides est : $P(X \geqslant 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 1 - 0,647 \approx 0,353$.

Partie C : Loi normale

On note Y la variable aléatoire qui, à chaque noix récoltée par ce nuciculteur, associe sa masse en grammes.
On admet que Y suit la loi normale d'espérance $\mu = 28$ et d'écart-type $\sigma = 4$.

1. Le nuciculteur vend une partie de sa récolte sous la forme de filets contenant 100 noix chacun.

Une noix pèse en moyenne 28 grammes donc le filet de 100 noix pèse en moyenne en gramme $100 \times 28 = 2\,800$, soit 2,8 kg.

2. D'après le cours : $P(20 \leqslant Y \leqslant 36) = P(\mu - 2\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$.

3. Le nuciculteur décide de ne pas utiliser les noix dont la masse est inférieure à 18 grammes.

La probabilité pour qu'une noix prise au hasard dans la production soit rejetée est : $P(X < 18) \approx 0,06$.