

∞ Corrigé du BTS Groupement D2 – 18 mai 2026 ∞
Métropole – Antilles – Guyane – Polynésie

Exercice 1

(11 points)

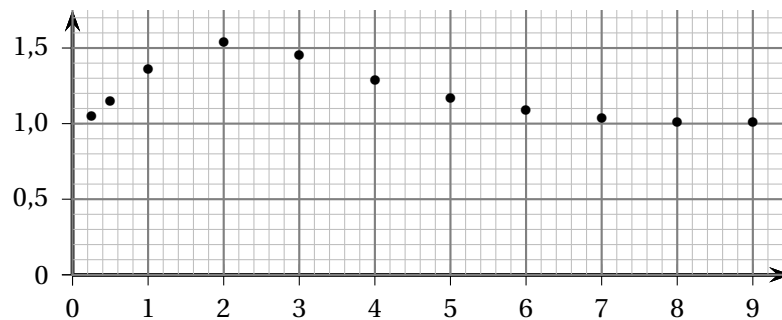
La glycémie est le taux de glucose (sucre) contenu dans le sang. Elle est exprimée en gramme par litre de sang (g/L). Le taux normal de la glycémie (à jeun) est compris entre 0,7 g/L et 1,1 g/L de sang.

On étudie ici le processus d'élimination du glucose chez un adulte en bonne santé. À jeun, une injection de glucose est réalisée. On effectue plusieurs mesures de la glycémie. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau suivant T qui donne la glycémie g (en g/L) à l'instant t désignant le temps écoulé, en heures, depuis l'injection :

t_i	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
g_i	1,05	1,15	1,36	1,54	1,45	1,29	1,17	1,09	1,04	1,02	1,01

Partie A – Obtention d'une première modélisation (statistiques)

1. Le nuage de points correspondant au tableau de valeurs T a été représenté ci-dessous :



Un ajustement affine n'apparaît pas réalisable car les points du nuage ne sont pas proches d'être alignés.

On effectue le changement de variable $y = \ln(g - 1)$.

2. On obtient alors le tableau T_1 ci-dessous :

t_i	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	y_1	y_2	-1,022	-0,616	-0,799	-1,238	-1,772	-2,408	-3,219	-3,912	-4,605

- a. On donne les valeurs manquantes y_1 et y_2 (arrondies au millième) :
 $y_1 = \ln(0,05) \approx -2,996$ et $y_2 = \ln(0,15) \approx -1,897$
- b. La valeur, arrondie à 0,01, du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique correspondant au tableau T_1 est $r \approx -0,69$.

3. On décide de supprimer les deux premières colonnes du tableau et de considérer la série statistique $(t; y)$ donnée par le tableau suivant T_2 :

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	-1,022	-0,616	-0,799	-1,238	-1,772	-2,408	-3,219	-3,912	-4,605

- La valeur, arrondie à 0,01, du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique correspondant au tableau T_2 est : $r \approx -0,95$.
- Le coefficient de corrélation linéaire mesure la qualité de l'alignement des points; plus sa valeur absolue est proche de 1 meilleure est la qualité de l'alignement des points. Dans le tableau T_2 le coefficient de corrélation linéaire est plus proche de 1 en valeur absolue. L'ajustement affine est de meilleure qualité avec les points correspondant à T_2 .
- À l'aide de la calculatrice, on détermine par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $(t_i; y_i)$ de ce tableau T_2 sous la forme $y = at + b$, les réels a et b étant arrondis au millièmes :
 $y = -0,504t + 0,342$

4. On considère le tableau suivant T_3 , qui est le tableau T auquel les deux premières colonnes ont été supprimées :

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
g_i	1,36	1,54	1,45	1,29	1,17	1,09	1,04	1,02	1,01

- Du changement de variable $y = \ln(g - 1)$, on déduit : $g = 1 + e^y$
Avec l'ajustement affine $y = -0,504t + 0,342$, on obtient :
 $g(t) = 1 + e^{-0,504t+0,342} = 1 + e^{0,342} e^{-0,504t} = 1 + 1,408 e^{-0,504t} = 1 + 1,41 e^{-0,5t}$
- $g(0,25) = 1 + 1,41 e^{-0,125} \approx 2,244$; erreur relative : $\frac{g(0,25) - 1,05}{1,05} \approx 114 \%$
 $g(0,5) = 1 + 1,41 e^{-0,25} \approx 2,098$; erreur relative : $\frac{g(0,5) - 1,15}{1,15} \approx 82 \%$
L'écart entre les valeurs réelles et les valeurs du modèle est trop important donc cette modélisation par la fonction g n'apparaît pas en accord avec les deux premières valeurs du tableau T .

Partie B – Étude d'une seconde modélisation

On admet ici que la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(t) = 1 + t^2 e^{-t}$ modélise, en fonction du temps t exprimé en heures, la glycémie de l'adulte $g(t)$, exprimée en g/L. Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction g a été tracée ci-dessous.

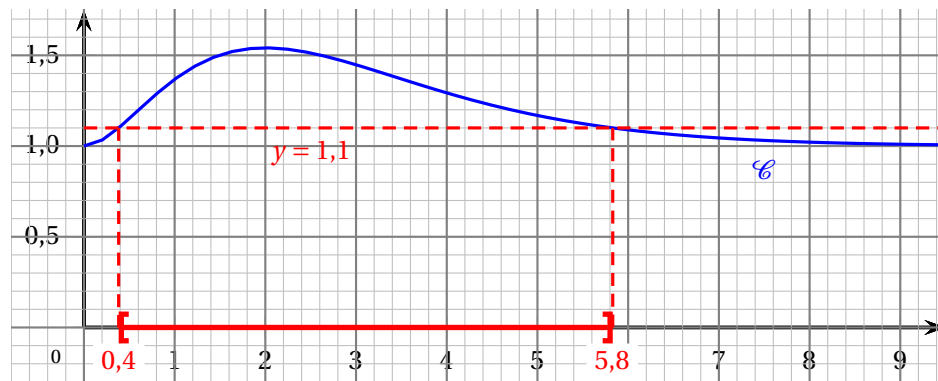
- Un adulte à jeun est considéré en hyperglycémie quand sa glycémie est supérieure ou égale à 1,1 g/L. La glycémie est supérieure à 1,1 quand la courbe est au-dessus de la droite d d'équation $y = 1,1$.

La courbe $\mathcal{C}$ et la droite d se coupent en deux points d'abscisses environ 0,4 et 5,8.

D'après la courbe représentative de la fonction g , l'intervalle de temps en heure $[0,4; 5,8]$ est une estimation de la plage horaire sur laquelle l'adulte étudié est en hyperglycémie.

$$0,4 \times 60 = 24 \text{ et } 5,8 \times 60 = 348$$

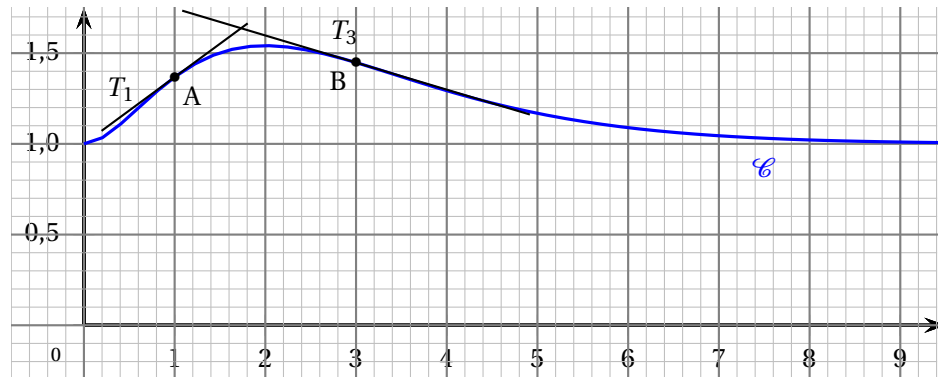
C'est donc entre 24 min et 5 h 48 min que l'adulte étudié est en hyperglycémie.



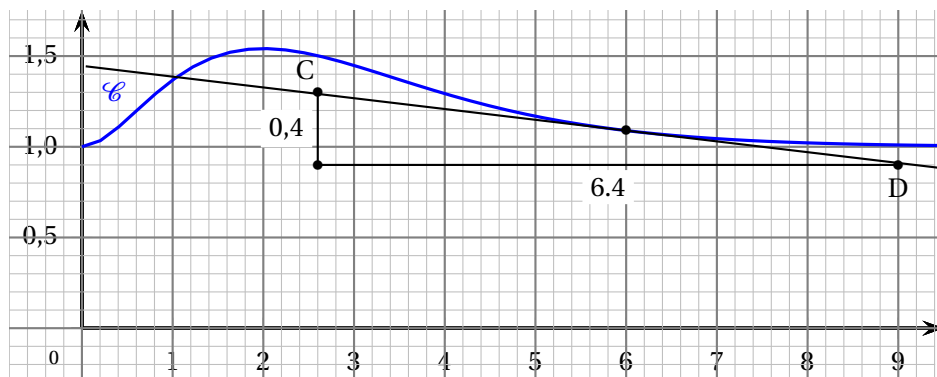
On admet que la vitesse instantanée à laquelle évolue la glycémie, exprimée en g/L par heure (g/L/h), à un temps donné t_0 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse t_0 .

- 2.
- La tangente T_1 à la courbe $\mathcal{C}$ au point A de la courbe d'abscisse 1 a un coefficient directeur positif, donc la vitesse instantanée est positive.
 - La tangente T_3 à la courbe $\mathcal{C}$ au point B de la courbe d'abscisse 3 a un coefficient directeur négatif, donc la vitesse instantanée est négative.

Donc l'affirmation « la vitesse instantanée à laquelle évolue la glycémie est constante au cours du temps » est fausse.



3. a. Par un raisonnement graphique, on veut estimer la vitesse instantanée de variation de la glycémie au temps $t_0 = 6$ h.



La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point de la courbe d'abscisse 6 passe par les points C et D dont les coordonnées sont environ (2,6 ; 1,3) et (9 ; 0,9). Son coefficient directeur est donc $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0,9 - 1,3}{9 - 2,6} = \frac{-0,4}{6,4} \approx 0,06$.

- b. Pour déterminer exactement la vitesse instantanée de variation de la glycémie au temps $t_0 = 6$ h, on devrait calculer $g'(6)$.

4. On admet que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t} = 0$. On en déduit que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 1$.

Donc le taux de glycémie de l'adulte étudié tend vers 1 g/L.

5. a. $g(t) = 1 + t^2 e^{-t}$ donc $g'(t) = 0 + 2t \times e^{-t} + t^2 \times (-1) e^{-t} = 2t e^{-t} - t^2 e^{-t} = t(2 - t) e^{-t}$.
On étudie le signe de $g'(t)$ sur $[0 ; +\infty[$ et on en déduit le tableau de variations de la fonction g .

t	0	2	$+\infty$
t	0	+	+
$2 - t$		+	0
e^{-t}		+	+
$g'(t)$	0	+	0
g	$g(0)$	$g(2)$	1

- b. La valeur maximale de la glycémie (arrondie à 0,01 g/L) de l'adulte étudié est égale à $g(2)$ soit 1,54 g/L.

Elle est atteinte 2 heures après l'injection.

6. Un adulte à jeun est considéré en hyperglycémie quand sa glycémie est supérieure ou égale à 1,1 g/L.

L'algorithme ci-contre permet de déterminer le temps en minute depuis le pic de glycémie (2 h après la prise de glucose) à partir duquel l'adulte n'est plus en hyperglycémie.

```

T prend la valeur 2
G prend la valeur g(2)
Tant que G ≥ 1
    T prend la valeur T + 1/60
    G prend la valeur g(T)
Fin Tant que
Renvoyer T

```

Exercice 2**(9 points)**

Une entreprise fabrique des pipettes destinées à être utilisées en laboratoire. Le cahier des charges impose à une pipette d'avoir un diamètre interne d et une longueur L conformes aux exigences des utilisateurs. La pipette est alors conforme. Sinon, elle est considérée comme défectueuse.

Partie A

L'entreprise met au point un nouveau contrôle automatisé qui vise à déterminer si une pipette est conforme ou défectueuse. Toute pipette conforme devrait être acceptée au contrôle; toute pipette défectueuse devrait y être refusée. Toutefois :

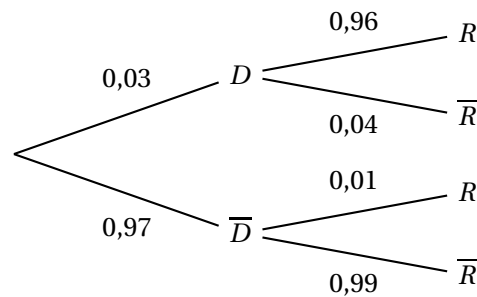
- 96 % des pipettes défectueuses sont refusées au contrôle;
- 99 % des pipettes conformes sont acceptées au contrôle.

L'entreprise décide d'utiliser ce nouveau contrôle sur un lot comprenant un très grand nombre de pipettes, tout en sachant que 3 % des pipettes du lot sont défectueuses. Une pipette est prélevée dans ce lot. On considère alors les événements :

- D : « la pipette est défectueuse »;
- R : « la pipette est refusée au contrôle ».

On note respectivement $\bar{R}$ et $\bar{D}$ les événements contraires des événements R et D .

1. On complète l'arbre pondéré ci-dessous.



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 P(R) &= P(R \cap D) + P(R \cap \bar{D}) \\
 &= P(D) \times P_D(R) + P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(R) \\
 &= 0,03 \times 0,96 + 0,97 \times 0,01 \\
 &= 0,0288 + 0,0097 \\
 &= 0,0385
 \end{aligned}$$

3. La probabilité de l'événement « La pipette est défectueuse sachant qu'elle est refusée » est :

$$\begin{aligned}
 P_R(D) &= \frac{P(R \cap D)}{P(R)} \\
 &= \frac{0,03 \times 0,96}{0,0385} \\
 &= \frac{0,0288}{0,0385} \\
 &\approx 0,748 \text{ arrondie à } 10^{-3}
 \end{aligned}$$

4. Dans ce contexte de contrôle de conformité, il est important pour l'entreprise de « maîtriser le risque » qu'une pipette défectueuse soit acceptée au contrôle.

$P_D(\bar{R})$ est la probabilité de l'événement « La pipette est acceptée sachant qu'elle est défectueuse ».

Le plus mauvais choix est d'accepter une pipette défectueuse donc il est plus pertinent de connaître $P_D(\bar{R})$.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la longueur L des pipettes fabriquées. La probabilité qu'une pipette prélevée au hasard ait un défaut de longueur est égale à 0,02.

La production est suffisamment importante pour que tout prélèvement au hasard de 550 pipettes dans la production puisse être assimilé à un tirage aléatoire avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 550 pipettes, associe le nombre de pipettes ayant un défaut de longueur.

1. a. L'expérience peut être assimilée à une répétition 550 fois d'une expérience de Bernoulli avec comme probabilité de succès $p = 0,02$. Le succès étant de « tirer une pipette avec un défaut de longueur ». La variable aléatoire X compte le nombre de succès et donc suit une loi binomiale de paramètres n et p avec $n = 550$ et $p = 0,02$. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(550; 0,02)$.
- b. Le nombre moyen de pipettes avec un défaut de longueur dans un échantillon de 550 pipettes prélevées au hasard est l'espérance de la variable aléatoire X : $E(X) = n \times p = 550 \times 0,02 = 11$
- c. On prélève au hasard 550 pipettes dans la production.
La probabilité de l'événement : « le prélèvement contient exactement 10 pipettes ayant un défaut » est :

$$P(X = 10) = \binom{550}{10} \times 0,02^{10} \times (1 - 0,02)^{540} \approx 0,120 \text{ arrondie à } 10^{-3} \text{ près}$$

On admet que la variable aléatoire X peut être approximée par une variable aléatoire Y qui suit une loi normale.

2. En approximation en loi, on doit avoir $E(Y) = E(X)$ et $V(Y) = V(X)$.
 $m = E(Y) = E(X) = 11$ et $\sigma^2 = V(Y) = V(X) = 550 \times (1 - 0,02) \times 0,02 = 10,78$
Ainsi $\sigma = \sqrt{10,78} \approx 3,283$ arrondie à 10^{-3} près.
On peut prendre $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(11; 10,78)$.
3. a. $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(11; 10,78)$ est une variable à densité. On ne peut déterminer que des probabilités d'appartenance à un intervalle de valeurs.
- b. $P(9,5 \leq Y \leq 10,5)$.
 $P(9,5 \leq Y \leq 10,5) \approx 0,011$ arrondie à 10^{-3} près.

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre interne des pipettes fabriquées. Afin de contrôler si la moyenne m des diamètres internes de l'ensemble des pipettes fabriquées est de 1 mm, on se propose de construire un test d'hypothèse bilatéral au seuil de signification de 5 %.

On désigne par $\bar{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 200 pipettes prélevées dans la production de l'entreprise, associe la moyenne des diamètres des 200 pipettes. La production est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler un tel prélèvement de 200 pipettes à un tirage aléatoire avec remise.

On considère :

- l'hypothèse nulle est : « $H_0 : m = 1$ » ;
- l'hypothèse alternative est : « $H_1 : m \neq 1$ »
- le seuil de signification du test est fixé à 0,05.

On suppose que la variable aléatoire $\bar{X}$ suit la loi normale de moyenne m et d'écart type égal à 0,0318.

1. Sous l'hypothèse nulle H_0 , $\bar{X}$ suit la loi normale de moyenne 1 et d'écart type égal à 0,0318. On sait donc que $P(m - 2\sigma \leq \bar{X} \leq m + 2\sigma) \approx 0,95$.

Ainsi $h = 2 \times 0,0318 \approx 0,064$ arrondi à 10^{-3} près.

$1 - 0,064 = 0,936$ et $1 + 0,064 = 1,064$

Donc $P(\bar{X} \in [0,936 ; 1,064]) = 0,95$.

2. On énonce la règle de décision du test.

Si la moyenne de l'échantillon observé appartient à l'intervalle $[0,936 ; 1,064]$, on peut accepter au risque de 5 % l'hypothèse H_0 , c'est-à-dire admettre que la moyenne des diamètres internes de l'ensemble des pipettes fabriquées est de 1 mm.

Sinon, on rejette l'hypothèse H_0 .

3. On prélève au hasard 200 pipettes dans la production. Les mesures expérimentales ont permis d'obtenir le tableau suivant :

Diamètre interne en mm	Nombres de pipettes
[0,88 ; 0,90[	2
[0,90 ; 0,92[	5
[0,92 ; 0,94[	11
[0,94 ; 0,96[	12
[0,96 ; 0,98[	15
[0,98 ; 1,00[	65
[1,00 ; 1,02[	70
[1,02 ; 1,04[	10
[1,04 ; 1,06[	8
[1,06 ; 1,08[	2

- a. En utilisant les centres des intervalles, une valeur approchée du diamètre interne moyen $\bar{d}$ d'une pipette de cet échantillon est : $\bar{d} = 0,992$.
- b. $\bar{d} = 0,992 \in [0,936 ; 1,064]$ donc on peut accepter l'hypothèse H_0 .