∽ Corrigé du BTS Opticien–lunetier ∾

18 mai 2026

Exercice 1 — 10 points

Partie A. Série statistique

1. Au vu de ce graphique, un ajustement linéaire de N en t n'est pas pertinent puisque l'allure du nuage de points n'est pas rectiligne.

2. a. La valeur de z pour le mois de mars 2026 est $z = \ln\left(\dfrac{4\,000}{3120} - 1\right) \approx -1{,}266$.

b. Les z décroissent lorsque t augmente donc on peut être certain que $r < 0$.

c. Avec la calculatrice, $r \approx -0{,}999$.

Cette valeur est proche de -1 donc un ajustement linéaire de z en t est pertinent.

d. Une équation de la droite de régression linéaire de z en t est $z = -1{,}6t + 2$.

e. L'égalité $N = \dfrac{4\,000}{1 + \mathrm{e}^{-1{,}6t+2}}$ s'écrit $N = \dfrac{4\,000}{1 + C\mathrm{e}^{-1{,}6t}}$ avec $C = \mathrm{e}^2 \approx 7$

puisque $\mathrm{e}^{-1{,}6t+2} = \mathrm{e}^{-1{,}6t} \times \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2 \times \mathrm{e}^{-1{,}6t}$ pour tout t.

Partie B. Équation différentielle

1. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 1{,}6y = 0$ sont les fonctions de la forme $y = k\mathrm{e}^{-1{,}6t}$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante.

2. La fonction g est solution de l'équation différentielle $y' + 1{,}6y = 1{,}6$ si $g'(t) + 1{,}6g(t) = 1{,}6$ pour tout t soit $0 + 1{,}6A = 1{,}6$ d'où $A = 1$ et $g(t) = 1$.

3. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme $y = k\mathrm{e}^{-1{,}6t} + 1$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante.

4. $h(0) = 8 \iff k\mathrm{e}^{-1{,}6\times 0} + 1 = 8 \iff k \times 1 + 1 = 8 \iff k = 7$

donc la solution cherchée est $h(t) = 7\mathrm{e}^{-1{,}6t} + 1$.

Partie C. Étude d'une fonction

1. Le nombre de verres vendus en avril 2026 est $f(3) = \dfrac{4\,000}{1+7\mathrm{e}^{-1,6\times 3}} \approx 3782$.

2. a. L'indication 1 implique que la courbe $\mathscr{C}$ possède en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = 4\,000$.

b. Avec l'indication 2 on a $44\,800\mathrm{e}^{-1,6t} > 0$ puisqu'une exponentielle est strictement positive, et $\left(1+7\mathrm{e}^{-1,6t}\right)^2 > 0$ puisque le carré d'un réel non nul est strictement positif,

donc par quotient $f'(t) > 0$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

On donne le tableau des variations de f.

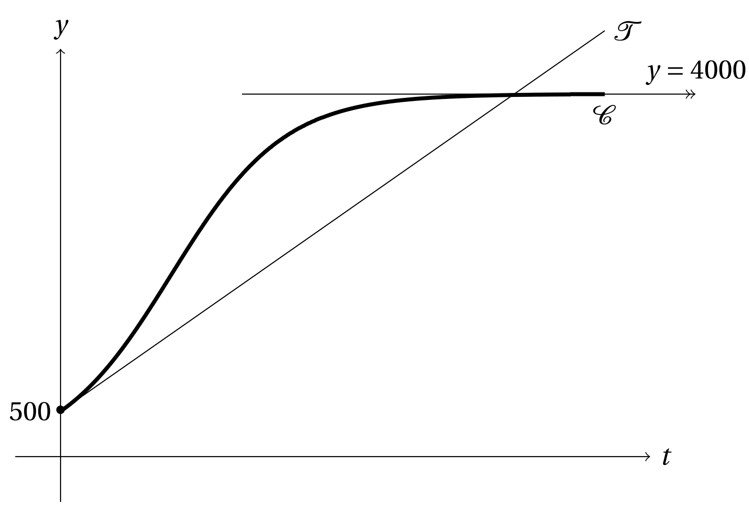
t	0 $+\infty$
$f'(t)$	$+$
f	$500 \nearrow 4000$

c. D'après l'indication 3, une équation de la tangente $\mathscr{T}$ est $y = 500 + 700t$ et la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de la tangente $\mathscr{T}$ au voisinage de $t = 0$ puisque $420t^2 \geqslant 0$.

3. Le chef a toujours raison.

C'est donc le modèle qui a tort, puisque selon ce modèle la fonction f croît vers une limite de 4 000 et ne peut donc pas dépasser 4 000 et ne peut donc pas atteindre 5 000.

4. On donne l'allure de la courbe, en utilisant la tangente en zéro, en respectant la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de zéro, en utilisant la croissance de la fonction, et l'asymptote.



Exercice 2 10 points

Partie A. Probabilités conditionnelles

1. On recopie et on complète le tableau.

	Montures présentant un défaut de charnières	Montures ne présentant pas un défaut de charnières	Total
Montures présentant un défaut de batterie	10	**50**	60
Montures ne présentant pas un défaut de batterie	20	**920**	**940**
Total	**30**	**970**	1 000

2. La probabilité que la monture choisie présente un défaut de charnières est $P(C) = \dfrac{30}{1\,000} = 0{,}03$.
3. La probabilité que la monture choisie ne présente aucun défaut est $P(\overline{B} \cap \overline{C}) = \dfrac{920}{1\,000} = 0{,}92$.
4. La probabilité de C sachant B est $P_B(C) = \dfrac{10}{60} \approx 0{,}167$.

Partie B. Loi binomiale

1. Les paramètres de la loi de X sont $n = 150$ et $p = 0{,}06$.
2. La probabilité qu'il y ait au maximum 9 montures présentant un défaut de batterie dans le colis est $P(X \leqslant 9) \approx 0{,}587$, d'après la calculatrice.
3. La probabilité que le colis ne soit pas expédié est $P(X > 12) \approx 0{,}117$, d'après la calculatrice.
4. L'espérance de X est $E(X) = np = 150 \times 0{,}06 = 9$ donc en moyenne dans un colis 9 montures présentent un défaut de batterie.

Partie C. Loi normale

1. Graphiquement la moyenne est $\mu = 720$.
2. L'intervalle à plus ou moins deux écart types est $[670\,;\,770]$ de rayon $2\sigma = 50$ donc l'écart-type est environ égal à 25.
3. $P(Y \geqslant 720) = 0{,}5$, $P(Y \leqslant 770) = 0{,}025$ et $P(Y \leqslant 670) = 0{,}025$, en utilisant la calculatrice, ou plus simplement la symétrie de la gaussienne.

Partie D. Intervalle de confiance

1. Une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p est $f = \dfrac{616}{800} = 0,77$.
2. Un intervalle de confiance centré sur f de la proportion inconnue p avec le niveau de confiance de 95 % est $\left[0,77 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,77 \times 0,23}{800}}\ ;\ 0,77 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,77 \times 0,23}{800}}\right] \approx [0,74;0,80]$.
3. Si l'enquête est réalisée auprès de 200 clients, et que 154 d'entre eux se déclarent satisfaits, l'estimation ponctuelle $f = \dfrac{154}{200} = 0,77$ ne change pas, par contre l'IC est modifié $[0,71\ ;\ 0,83]$ (la formule fait intervenir l'effectif de l'échantillon).