Corrigé du BTS Opticien–lunetier
15 mai 2023

Exercice 1 **10 points**

Partie A - Etude d'une série statistique.

1. Le nuage de points $(t~;~N)$ n'a pas une allure rectiligne donc un ajustement affine de N en t n'est pas pertinent.

2. **a.** Le coefficient de corrélation de la série $(t~;~z)$ est $-0{,}989$.
   b. Cette corrélation est proche de -1 donc un ajustement affine de z en t est pertinent.

3. L'équation de la droite de régression linéaire de z en t est $z = -0{,}80t + 4{,}83$.

4. $z = at+b \iff \ln(415-N) = at+b \iff 415-N = \text{e}^{at+b} \iff -N = \text{e}^{at}\text{e}^{b}-415 \iff N = 415-125\text{e}^{-0{,}8t}$
   avec $\text{e}^{b} = \text{e}^{4{,}83} \approx 125$.

5. En 2023, $t = 6$ et $N = 415 - 125\text{e}^{-0{,}8\times 6} \approx 414$ montures vendues.

Partie B - Résolution d'une équation différentielle.

1. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $5y' + 4y = 0$ sont les fonctions de la forme $y = k\text{e}^{-\frac{4}{5}t}$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante.

2. La fonction constante g est définie par $g(t) = c$, donc $g'(t) = 0$.
   Alors g est solution de l'équation différentielle (E) quand $5g'(t)+4g(t) = 1\,660$ donc lorsque $5\times 0+4c = 1\,660$ d'où $c = \dfrac{1\,660}{4} = 415$, ainsi $g(t) = 415$.

3. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme $y = k\text{e}^{-\frac{4}{5}t} + 415$.

4. $f(0) = 290$ donc $k\text{e}^{-\frac{4}{5}\times 0} + 415 = 290$ soit $k = 290 - 415 = -125$ et $f(t) = -125\text{e}^{-\frac{4}{5}t} + 415$.

Partie C - Étude d'une fonction.

1. D'après le logiciel de calcul formel, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 415$ donc la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 415$ comme asymptote en $+\infty$.
   Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que le nombre de montures vendues va se stabiliser à 415 à long terme.

2. D'après le logiciel de calcul formel, $f'(t) = 100\text{e}^{-\frac{4}{5}t}$ or $\text{e}^{-\frac{4}{5}t} > 0$ donc $f'(t) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

3. La situation correcte est la situation 2.

   Le développement limité $f(t) = 290 + 100t - 40t^2 + t^2\varepsilon(t)$ donné par le logiciel de géométrie dynamique permet d'affirmer que T : $y = 290 + 100t$ et que la courbe de f est en-dessous de sa tangente au voisinage de zéro puisque $-40t^2 < 0$.

Partie D - Étude d'une suite.

1. Lors de l'année 2018 on a $u_1 = 0{,}9u_0 + 500 = 0{,}9 \times 3\,000 + 500 = 3\,200$ clients.

2. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 5\,000 = 0{,}9u_n + 500 - 5\,000 = 0{,}9u_n - 4\,500 = 0{,}9(u_n - 5\,000) = 0{,}9v_n$
   donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9.

3. La suite (v_n) est géométrique de raison 0,9 et $v_0 = u_0 - 5\,000 = 3\,000 - 5\,000 = -2\,000$ donc pour tout entier naturel n, on a $v_n = -2\,000 \times 0{,}9^n$.
4. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 5\,000$ donc $u_n = v_n + 5\,000 = -2\,000 \times 0{,}9^n + 5\,000$ soit $u_n = 5\,000 - 2\,000 \times 0{,}9^n$.

5. Le nombre de clients lors de l'année 2023 est $u_6 = 5\,000 - 2\,000 \times 0{,}9^6 \approx 3\,937$.

6. On considère l'algorithme suivant :

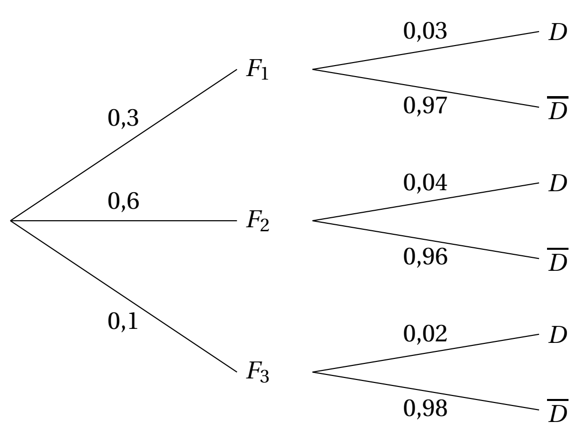
```
n←0
u←3000
Tant que u⩽4000
      n←n+1
      u←0,9*u+500
Fin Tant que
```

   La valeur de la variable n après l'exécution de l'algorithme est `n=7` si `n` est initialisé à zéro (et `n=8` si `n` est initialisé à un).
   Cela signifie que le nombre de clients dépassera 4 000 pour `n`⩾7 donc à partir de l'année 2024.

Exercice 2 **10 points**

Partie A - Probabilités conditionnelles.

1. On a recopié et complété l'arbre :



2. $P(F_1 \cap D) = P(F_1)\,P_{F_1}(D) = 0{,}3 \times 0{,}03 = 0{,}009$.
3. La probabilité que le verre semi-fini soit défectueux est
   $P(D) = P(F_1 \cap D) + P(F_2 \cap D) + P(F_3 \cap D) = 0{,}009 + 0{,}6 \times 0{,}04 + 0{,}1 \times 0{,}02 = 0{,}035$.

4. On sait que le verre semi-fini est défectueux.
   La probabilité qu'il provienne du premier fournisseur est $P_D(F_1) = \dfrac{P(D \cap F_1)}{P(D)} = \dfrac{0{,}009}{0{,}035} \approx 0{,}257$.

Partie B - Loi binomiale et loi normale.

1. **a.** La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,035$.

   b. $P(6 \leqslant X \leqslant 10) = P(X \leqslant 10) - P(X \leqslant 5) \approx 0,905 - 0,296 = 0,609$.

2. **a.** On approche la loi de X par une loi normale de même espérance $\mu = np = 200 \times 0,035 = 7$ et de même écart type $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{200 \times 0,035 \times 0,965} \approx 2,599$.

   b. Si la variable aléatoire Y suit la loi normale d'espérance 7 et d'écart type 2,6,
   alors $P(5,5 \leqslant Y \leqslant 10,5) \approx 0,629$,
   ce qui signifie que la probabilité qu'il y ait entre 6 et 10 verres défectueux est 0,629 avec l'approximation de la loi binomiale par une loi normale.

Partie C - Loi exponentielle.

1. L'espérance de T est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,2} = 5$.
   Cela signifie que le temps d'attente moyen est de 5 minutes.

2. On considère un appel au standard, choisi au hasard.
   La probabilité que le temps d'attente correspondant à cet appel soit compris entre 2 et 4 minutes est $P(2 < T < 4) = P(T < 4) - P(T < 2) = 1 - \mathrm{e}^{-0,2\times 4} - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,2\times 2}\right) = \mathrm{e}^{-0,4} - \mathrm{e}^{-0,8} \approx 0,221$.

Partie D - Estimation

1. Une estimation ponctuelle de la proportion p est $f = \dfrac{80}{100} = 0,8$.

2. Une estimation de p par un intervalle de confiance avec le coefficient de confiance 90 % est
   $\left[f - 1,65\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\,;f + 1,65\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right] = \left[0,8 - 1,65\sqrt{\dfrac{0,8 \times 0,2}{100}}\,;0,8 + 1,65\sqrt{\dfrac{0,8 \times 0,2}{100}}\right] \approx [0,734\,;\,0,866]$.

3. $1,65\sqrt{\dfrac{0,16}{n}} \leqslant 0,03 \iff \sqrt{\dfrac{0,16}{n}} \leqslant \dfrac{0,03}{1,65} \iff \dfrac{0,16}{n} \leqslant \left(\dfrac{1}{55}\right)^2 \iff \dfrac{n}{0,16} \geqslant 55^2$

   $\iff n \geqslant 55^2 \times 0,16 \iff n \geqslant 484.$

   ce qui signifie que pour avoir un intervalle de confiance à 90 % avec une marge d'erreur d'au plus 3 points, on doit prendre un échantillon d'au moins 484 clients (en supposant que la fréquence reste égale à 0,8).