

~ Corrigé du BTS Polynésie mai 2026 ~
Services informatiques aux organisations

Épreuve de mathématiques approfondies

A. P. M. E. P.

Exercice 1

10 points

Une entreprise utilise un système d'information pour traiter les commandes de ses clients. L'entreprise dispose de deux serveurs (notés A et B) qui traitent les commandes, celles-ci peuvent être traitées avec succès ou échouer à différentes étapes. On souhaite modéliser le fonctionnement du système et analyser les temps de traitement.

Partie A

Le serveur A traite 60 % des commandes dont 90 % sont traitées avec succès.

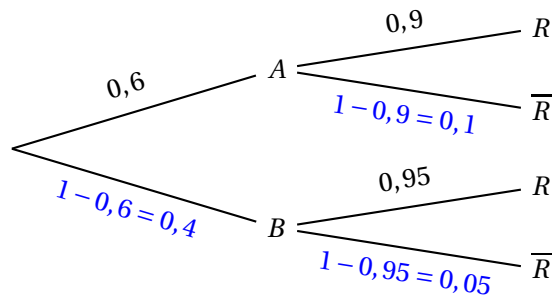
95 % des commandes du serveur B sont traitées avec succès.

On considère les événements :

- A : « La commande a été traitée par le serveur A ».
- B : « La commande a été traitée par le serveur B ».
- R : « La commande a été passée avec succès ».

On choisit au hasard une commande parmi celles qui ont été traitées par les serveurs de l'entreprise.

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



2. La probabilité que la commande ait été traitée par le serveur A et ait été passée avec succès est : $P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = 0,6 \times 0,9 = 0,54$.

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A \cap R) + P(\bar{A} \cap R) = 0,54 + 0,4 \times 0,95 = 0,92.$$

4. Le directeur de l'entreprise affirme que le serveur A a traité plus de la moitié des commandes passées avec succès.

Il faut donc chercher la probabilité que la commande ait été traitée par le serveur A, sachant qu'elle a été traitée avec succès.

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0,54}{0,92} \approx 0,587$$

$P(A) > 0,5$ donc le directeur a raison.

Partie B

Le temps (en minutes) écoulé entre deux commandes arrivant dans le système est modélisé par une variable aléatoire, notée T , qui suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

1. On sait que la probabilité qu'il s'écoule moins de 10 minutes entre deux commandes vaut 0,45.

$$P(T < 10) = 0,45 \iff 1 - e^{-\lambda \times 10} = 0,45 \iff 0,55 = e^{-10\lambda} \iff \ln(0,55) = -10\lambda$$

$$\iff \lambda = -\frac{\ln(0,55)}{10}$$

On prendra $\lambda = 0,06$ pour la suite de l'exercice.

2. La probabilité qu'il s'écoule au moins 15 minutes entre deux commandes est :

$$P(T \geq 15) = 1 - P(T < 15) = 1 - (1 - e^{-0,06 \times 15}) = e^{-0,9} \approx 0,407$$

3. La probabilité que le temps entre deux commandes soit supérieur ou égal à 15 minutes sachant qu'il y a déjà au moins 5 minutes d'écoulées est : $P_{(T \geq 5)}(T \geq 15)$.

D'après la propriété de non vieillissement de la loi exponentielle :

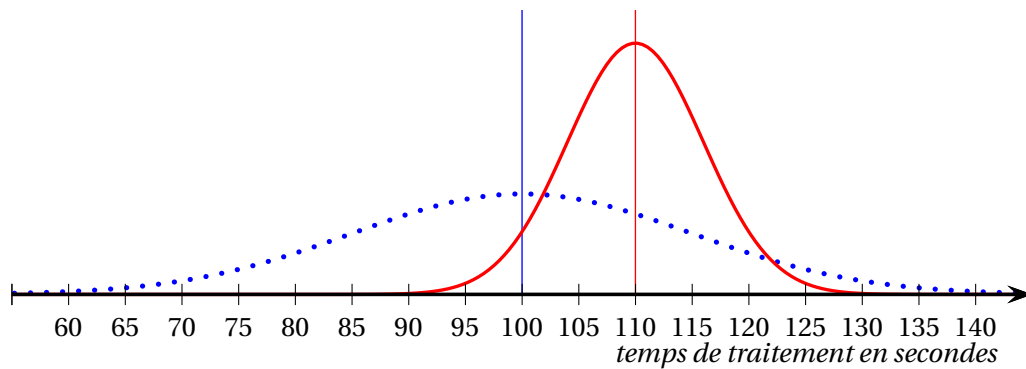
$$P_{(T \geq 5)}(T \geq 15) = P_{(T \geq 5)}(T \geq 5 + 10) = P(T \geq 10)$$

$$\text{La probabilité cherchée est : } P(T \geq 10) = 1 - P(T < 10) = 1 - 0,45 = 0,55.$$

Partie C

Le temps de traitement d'une commande (en secondes) du serveur A (respectivement B), est modélisé par une variable aléatoire notée X_A (respectivement X_B), qui suit une loi normale d'espérance μ_A (respectivement μ_B) et d'écart-type $\sigma_A = 6$ (respectivement $\sigma_B = 15$).

On nomme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les courbes représentatives des fonctions de densité des variables aléatoires X_A et X_B représentées dans la figure ci-dessous.



1. a. Si une variable aléatoire suit une loi normale d'espérance μ , alors la courbe représentant sa fonction de densité est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \mu$.

La courbe en pointillés est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 100$, donc elle correspond à la variable aléatoire d'espérance 100, donc X_B .

Donc $\mu_B = 100$.

- b. $\mu_B = 100$ donc $\mu_A = 110$

2. La probabilité que le temps de traitement d'une commande traitée par le serveur A soit de moins de deux minutes (donc 120 secondes) est : $P(X_A < 120) \approx 0,952$.

3. Le temps de traitement nécessaire t , pour qu'au moins 95 % des commandes soient traitées par le serveur B en moins de t secondes est tel que : $P(X_B < t) \geq 0,95$.

On trouve à la calculatrice environ 125 secondes.

En effet, on a $P(X_B < 124) \approx 0,945 < 0,95$ et $P(X_B < 125) \approx 0,952 > 0,95$.

Exercice 2

10 points

Une entreprise développe une application qui collecte et stocke automatiquement des données utilisateurs sur un serveur local d'une capacité totale de 2 To (2 000 Go).

Partie A

On modélise l'évolution du volume total de données par une suite (u_n) géométrique de raison $q = 1,24$ et de premier terme $u_0 = 3,15$.

u_n désigne la quantité de données (en Go) stockées sur le serveur le jour n , où n désigne un entier naturel.

Ainsi le premier jour correspond à $n = 0$ et la quantité de données est alors $u_0 = 3,15$ Go.

1. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,24$ et de premier terme $u_0 = 3,15$ donc, pour tout n , on a : $u_n = u_0 \times q^n = 3,15 \times 1,24^n$.

2. Pour $n = 24$, on a : $u_{24} = 3,15 \times 1,24^{24} \approx 550$

Donc la quantité de données stockées le 24^e jour est d'environ 550 GO.

3. Déterminer à partir de quel jour la capacité de stockage aura atteint la capacité maximale de stockage, c'est-à-dire 2 TO soit 2 000 GO, c'est chercher n pour que $u_n > 2000$. On résout cette inéquation.

$$u_n > 2000 \iff 3,15 \times 1,24^n > 2000 \iff 1,24^n > \frac{2000}{3,15} \iff \ln(1,24^n) > \ln\left(\frac{2000}{3,15}\right)$$

$$\iff n \times \ln(1,24) > \ln\left(\frac{2000}{3,15}\right) \iff n > \frac{\ln\left(\frac{2000}{3,15}\right)}{\ln(1,24)}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{2000}{3,15}\right)}{\ln(1,24)} \approx 30,001 \text{ donc on atteint la capacité de stockage au bout de 30 jours.}$$

À partir du 24^e jour, l'entreprise décide de mettre en place un système automatique pour nettoyer le serveur.

Deux procédés sont proposés par l'informaticien, décrits chacun dans les parties B et C suivantes.

Partie B : 1^{er} procédé

Chaque nuit, 5 % des données stockées sont supprimées (données obsolètes).

En parallèle, l'application continue de collecter chaque jour une quantité fixe de 100 Go de nouvelles données.

On modélise l'évolution de la quantité de données (en Go), stockées sur le serveur, par la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 23$, par : $v_{n+1} = 0,95v_n + 100$ et $v_{23} = 444$.

1. On passe d'un terme de la suite au suivant en retirant 5 % puis en ajoutant 100.

Retirer 5 %, c'est multiplier par $1 - \frac{5}{100} = 0,95$.

Donc on passe du terme de rang n au terme de rang $n + 1$ en multipliant par 0,95 puis en ajoutant 100 donc, pour tout n , $v_{n+1} = 0,95v_n + 100$.

On admet que le terme général de la suite (v_n) est défini pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 23 par :

$$v_n = 2000 - 5063 \times 0,95^n.$$

2. • $0,95 < 1 \iff 0,95^n \times 0,95 < 0,95^n \times 1 \iff 0,95^{n+1} < 0,95^n$
 $\iff -5063 \times 0,95^{n+1} > -5063 \times 0,95^n$
 $\iff 2000 - 5063 \times 0,95^{n+1} > 2000 - 5063 \times 0,95^n$
 $\iff v_{n+1} > v_n$

Donc la suite (v_n) est croissante.

- $5063 \times 0,95^n > 0$ donc $-5063 \times 0,95^n < 0$ donc $2000 - 5063 \times 0,95^n < 2000$

Donc, avec ce procédé, la quantité de données augmente mais la capacité maximale de stockage ne sera pas atteinte.

Partie C : 2^e procédé

Un programme nettoie de manière continue le serveur.

La quantité de données, à chaque instant t , est modélisée par la fonction f définie pour tout réel $t \geq 23$, par : $f(t) = 2000 - 4914e^{-0,05t}$.

1. a. $f'(t) = 0 - 4914 \times (-0,05)e^{-0,05t} = 245,7e^{-0,05t}$
 b. Pour tout t , on a $e^{-0,05t} > 0$ donc $f'(t) > 0$; on en déduit que la fonction f est croissante, donc que la quantité de données augmente quand t augmente.
2. a. On résout l'inéquation $2000 - 4914e^{-0,05t} > 2000$.
 $2000 - 4914e^{-0,05t} > 2000 \iff -4914e^{-0,05t} > 0$
 Or, pour tout t , $e^{-0,05t} > 0$ donc $-4914e^{-0,05t} < 0$; on en déduit que l'inéquation n'a aucune solution.
- b. On peut en conclure qu'avec ce procédé, la quantité de données augmente mais la capacité maximale de stockage ne sera pas atteinte.