∽ Corrigé du BTS Métropole 17 mai 2023 ∾
Services informatiques aux organisations

Mathématiques approfondies

Exercice 1 — 10 points

Partie A

En 2022, une usine a assemblé 300 000 ordinateurs. L'entreprise souhaite optimiser les lignes de production dans les années futures et prévoit d'augmenter le nombre d'ordinateurs assemblés de 2 % par an.
On modélise la production annuelle de l'usine par une suite (P_n) telle que pour tout entier naturel n, P_n représente le nombre d'ordinateurs assemblés exprimé en milliers, au cours de l'année $2022+n$. Ainsi $P_0 = 300$.

1. **a.** $P_1 = P_0 + P_0 \times \dfrac{2}{100} = 300 + 300 \times \dfrac{2}{100} = 300 + 6 = 306$
   La production de l'usine en 2023 est, selon ce modèle, de 306 000 ordinateurs.

   b. Ajouter 2 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{2}{100} = 1{,}02$.
   Donc, pour tout n, on a $P_{n+1} = 1{,}02 \times P_n$.

   c. La suite (P_n) est donc une suite géométrique de premier terme $P_0 = 300$ et de raison $q = 1{,}02$.

2. **a.** La suite (P_n) est une suite géométrique de premier terme $P_0 = 300$ et de raison $q = 1{,}02$ donc, pour tout entier naturel n, on a : $P_n = P_0 \times q^n = 300 \times 1{,}02^n$.

   b. $2030 = 2022 + 8$; $P_8 = 300 \times 1{,}02^8 \approx 351{,}498$
   Le nombre d'ordinateurs assemblés en 2030 selon ce modèle est donc de 351 498.

3. On détermine le plus petit entier naturel n pour lequel $P_n > 400$.

$$P_n > 400 \iff 300 \times 1{,}02^n > 400 \iff 1{,}02^n > \frac{400}{300} \iff \ln\left(1{,}02^n\right) > \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$
$$\iff n \times \ln(1{,}02) > \ln\left(\frac{4}{3}\right) \iff n > \frac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\ln(1{,}02)}$$

$\dfrac{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}{\ln(1{,}02)} \approx 14{,}5$ donc le plus petit entier naturel n pour lequel $P_n > 400$ est $n = 15$.
$2022 + 15 = 2037$; c'est donc à partir de 2037 que la production de l'usine dépassera 400 000 ordinateurs.

Partie B

On s'intéresse plus précisément à l'une des lignes d'assemblage de l'usine.
Cette ligne permet d'assembler entre 20 000 et 40 000 ordinateurs par an.
On admet que si cette ligne d'assemblage permet de produire x milliers d'ordinateurs par an, le bénéfice associé, exprimé en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[20 ; 40]$ par : $f(x) = (45 - x)\mathrm{e}^{0{,}1x} - 10$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. On complète le tableau suivant en arrondissant les résultats au centième :

x	20	25	30	35	40
$f(x)$	174,73	233,65	291,28	321,15	262,99

2. **a.** $f'(x) = -1\mathrm{e}^{0,1x} + (45-x)\times 0,1\mathrm{e}^{0,1x} = -\mathrm{e}^{0,1x} + 4,5\mathrm{e}^{0,1x} - 0,1x\mathrm{e}^{0,1x} = (-0,1x+3,5)\mathrm{e}^{0,1x}$

b. On détermine le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[20\,;\,40]$.

x	20		35		40
$-0,1x+3,5$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{e}^{0,1x}$		$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

c. $f(20) \approx 174,73$; $f(35) \approx 321,15$ et $f(40) \approx 262,99$

On établit le tableau de variation de la fonction f sur $[20\,;\,40]$.

x	20		35		40
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	174,73	$\nearrow$	321,15	$\searrow$	262,99

3. Le nombre d'ordinateurs que la ligne d'assemblage doit fabriquer par an afin d'obtenir un bénéfice associé maximal est donc 35 000.

La valeur de ce bénéfice maximal est, à la dizaine d'euros près de 321 150 €.

4. On considère la fonction F définie sur $[20\,;\,40]$ par $F(x) = (550-10x)\mathrm{e}^{0,1x} - 10x$.

On admet que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[20\,;\,40]$.

a.
$$\begin{aligned}\int_{30}^{40} f(x)\,\mathrm{d}x &= F(40) - F(30)\\ &= \left((550-10\times 40)\mathrm{e}^{0,1\times 40} - 10\times 40\right) - \left((550-10\times 30)\mathrm{e}^{0,1\times 30} - 10\times 30\right)\\ &= \left((550-400)\mathrm{e}^{4} - 400\right) - \left((550-300(\mathrm{e}^{3} - 300\right)\\ &= 150\mathrm{e}^4 - 400 - 250\mathrm{e}^3 + 300 = 150\mathrm{e}^4 - 250\mathrm{e}^3 - 100\end{aligned}$$

b. La valeur moyenne de la fonction entre 30 et 40 est :

$$\frac{1}{40-30}\int_{30}^{40} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\left(150\mathrm{e}^4 - 250\mathrm{e}^3 - 100\right) = 15\mathrm{e}^4 - 25\mathrm{e}^3 - 10 \approx 306,83.$$

Donc le bénéfice moyen réalisé lorsque la ligne d'assemblage produit entre 30 000 et 40 000 ordinateurs est, à la dizaine d'euros près, de 306 830 €.

Exercice 2 **10 points**

Partie A

Le tableau suivant, où x_i désigne le rang de l'année mesuré à partir de l'année 2015, donne le nombre y_i d'appareils connectés, exprimé en milliards, dans le monde entre 2015 et 2021.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
x_i : rang de l'année	0	1	2	3	4	5	6
y_i : nombre d'appareils (en milliards)	15,4	17,7	20,4	23,1	26,7	30,7	35,8

1. **a.** Le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ vaut environ 0,99.

   b. Le coefficient de corrélation linéaire r est voisin de 1, donc on peut envisager un ajustement linéaire de y en x.

2. En arrondissant les coefficients au dixième, une équation de la droite de régression de y en x est : $y = 3{,}3x + 14{,}2$.

3. L'année 2023 correspond au rang 8; pour $x = 8$, on a : $y = 3{,}3 \times 8 + 14{,}2 = 40{,}6$.

   On peut donc estimer à 40,6 milliards le nombre d'appareils connectés en 2023.

Partie B

Un fabricant commercialise des montres connectées. Les batteries utilisées pour fabriquer ces montres proviennent de deux fournisseurs différents, notés A et B. 75 % des batteries du stock du fabricant proviennent du fournisseur A, les autres proviennent du fournisseur B. Le fabricant remarque des défauts de charge parmi les batteries de son stock. Après analyse, il constate que 1,2 % des batteries provenant du fournisseur A et 2 % de celles provenant du fournisseur 8 sont défectueuses. On prélève au hasard une batterie dans le stock du fabricant.

On considère les évènements suivants :

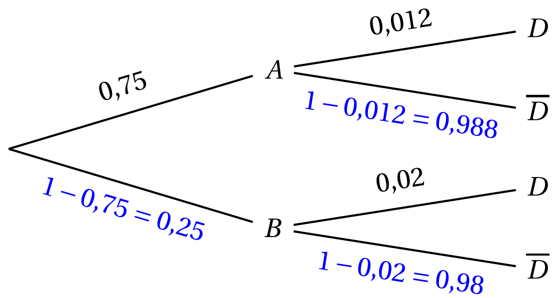
A : « la batterie prélevée provient du fournisseur A »;

B : « la batterie prélevée provient du fournisseur B »;

D : « la batterie prélevée est défectueuse ».

On note $\overline{D}$ l'évènement contraire de l'évènement D.

1. On modélise la situation par un arbre pondéré.



2. **a.** La probabilité de l'évènement $B \cap D$ est :
   $P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) = 0{,}25 \times 0{,}02 = 0{,}005$.

   b. Cela veut dire que la probabilité que la batterie présente un défaut et provienne du fournisseur B est égale à 0,005.

3. La probabilité que la batterie prélevée soit défectueuse est $P(D)$.
   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0{,}75 \times 0{,}012 + 0{,}005 = 0{,}014$.

4. Sachant que la batterie prélevée est défectueuse, la probabilité que celle-ci provienne du fournisseur B est : $P_D(B) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}005}{0{,}014} \approx 0{,}357$.

5. Le fabricant prélève au hasard 50 batteries de son stock.
   Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, a chaque lot de 50 batteries, associe le nombre de batteries défectueuses.

   a. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}014$.

   b. La probabilité qu'au moins une batterie soit défectueuse est :
   $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \dbinom{50}{0} \times 0{,}014^0 \times (1 - 0{,}014)^{50-0} \approx 0{,}506$.