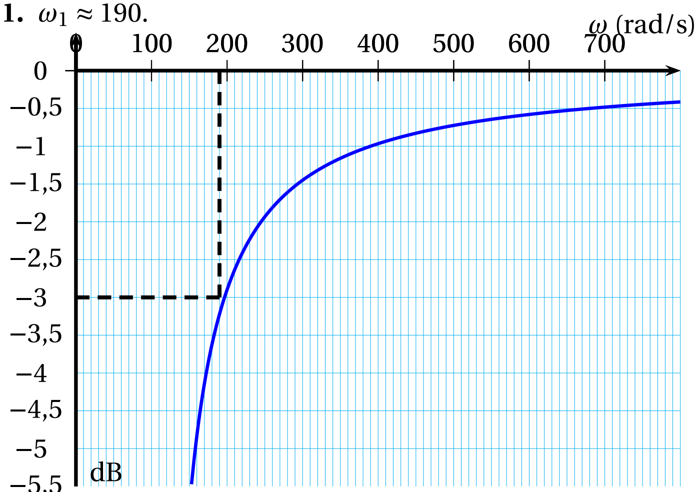
Corrigé du BTS groupement A Métropole - session 2015

Exercice 1 **11 points**

PARTIE A : cas du filtre F_1

1. $\omega_1 \approx 190$.



2. **a.** $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = \dfrac{190}{2\pi} \approx 30$ Hz

   b. La bande passante du filtre F_1 est $[30\,;+\infty[$.

PARTIE B : cas du filtre F_2

1. On a $\mathscr{L}(v_s(t)) + RC\mathscr{L}(v_s'(t)) = \mathscr{L}(v_e(t)) \Leftrightarrow V_s(p) + RC(pV_s(p) - v(0^+)) = V_e(p) \Leftrightarrow V_s(p) + RCpV_s(p) = V_e(p) \Leftrightarrow V_s(p)(1+RCp) = V_e(p) \Leftrightarrow \dfrac{V_s(p)}{V_e(p)} = \dfrac{1}{1+RCp}$.

   Donc $H_2(p) = \dfrac{1}{1+RCp}$.

2. **a.** $V_e(p) = \mathscr{L}(v_e(t)) = 5\mathscr{L}(\mathscr{U}(t)) = \dfrac{5}{p}$

   Ainsi $V_s(p) = V_e(p) \times \dfrac{1}{1+RCp} = \dfrac{5}{p} \times \dfrac{1}{1+RCp} = \dfrac{5}{p(1+RCp)}$

   b. $\dfrac{5}{p} - \dfrac{5}{p+\frac{1}{RC}} = \dfrac{5}{p} - \dfrac{5RC}{RCp+1} = \dfrac{5(RCp+1)}{p(RCp+1)} - \dfrac{5RCp}{p(pRC+1)} = \dfrac{5RCp+5-5RCp}{p(pRC+1)} = \dfrac{5}{p(1+RCp)} = V_s(p)$.

   c. $v_s(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{5}{p}\right) - \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{5}{p+\frac{1}{RC}}\right) = 5\mathscr{U}(t) - 5\mathrm{e}^{\frac{-1}{RC}t}\mathscr{U}(t)$

3. **a.** $\left|H_2(\mathrm{j}\omega)\right| = \left|\dfrac{1}{1+RC\mathrm{j}\omega}\right| = \dfrac{1}{\left|1+RC\mathrm{j}\omega\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$

   b. $G_2(\omega) = 20\log\left|H_2(\mathrm{j}\omega)\right| = 20\log\dfrac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} = -20\log(\sqrt{1+(RC\omega)^2}) = -20\times\dfrac{1}{2}\log(1+(RC\omega)^2) = -10\times\dfrac{\ln(1+(RC\omega)^2)}{\ln(10)} = -\dfrac{10}{\ln(10)}\times\ln\left(1+(RC)^2\omega^2\right)$.

4. **Étude de la fonction G_2**

   a. $G_2'(\omega) = -\dfrac{10}{\ln(10)} \times \dfrac{u'(\omega)}{u(\omega)}$ où $u(\omega) = 1+(RC)^2\omega^2$. On a alors $u'(\omega) = 2(RC)^2\omega$ Donc $G_2'(\omega) = -\dfrac{10}{\ln(10)} \times \dfrac{2(RC)^2\omega}{1+(RC)^2\omega^2} = \dfrac{1}{\ln(10)} \times \dfrac{-20(RC)^2\omega}{1+(RC)^2\omega^2}$.

b. Sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a $G_2'(\omega) < 0$ donc la fonction G_2 est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

c. $\lim\limits_{\omega \to +\infty} 1 + (RC)^2\omega^2 = +\infty$. Ainsi,
$\lim\limits_{\omega \to +\infty} \ln(1 + (RC)^2\omega^2) = +\infty$ et par conséquent $\lim\limits_{\omega \to +\infty} G_2(\omega) = -\infty$.

5. Détermination de la bande passante du filtre F_2

a. $G_2\left(\dfrac{1}{RC}\right) = -\dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln\left(1 + (RC)^2 \times \dfrac{1}{(RC)^2}\right) = -\dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(2) \approx -3,0$.

Donc la pulsation de coupure à -3 dB du filtre F_2, notée ω_2 est égale à $\dfrac{1}{RC}$ avec une bonne approximation.

b. $\omega_2 = \dfrac{1}{RC} = \dfrac{1}{160 \times 10^3 \times 3,4 \times 10^{-9}} \approx 1838$.

Ainsi : $f_2 = \dfrac{\omega_2}{2\pi} = \dfrac{1838}{2\pi} \approx 293$ Hz

c. G_2 étant une fonction strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, $G_2(\omega) > -3$ dB équivaut à $\omega < \omega_2$. Ainsi la bande passante du filtre F_2 est $[0\ ;\ 293]$.

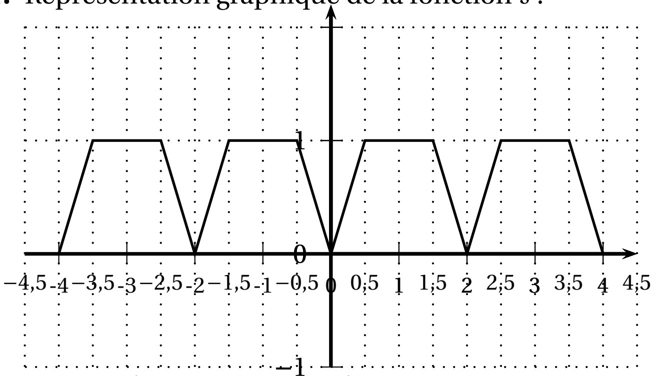
Partie C : bilan

1. La bande passante du bloc de filtres étudié est $[30\ ;\ 293]$
2. Le bloc de filtres étudié est associé au boomer.

Exercice 2 **9 points**

Partie A : série de Fourier associée à la fonction s

1. Représentation graphique de la fonction s :



2. $a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} s(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2} \times 2\displaystyle\int_{0}^{1} s(t)\,\mathrm{d}t$ car s est paire.

   $a_0 = \displaystyle\int_{0}^{0,5} 2t\,\mathrm{d}t + \int_{0,5}^{1} 1\,\mathrm{d}t = [t^2]_0^{0,5} + [t]_{0,5}^{1} =$

   $0,25 - 0 + 1 - 0,5 = \dfrac{3}{4}$.

3. Pour tout entier naturel n non nul, $b_n = 0$ car s est paire.

4. On a $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

   $a_n = \dfrac{2}{\mathrm{T}}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{2} \times 2\int_{0}^{1} s(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t$

   car s est paire.

   $a_n = 2\displaystyle\int_{0}^{0,5} 2t\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t + 2\int_{0,5}^{1} \cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t$

   $= 4\displaystyle\int_{0}^{0,5} t\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t + 2\int_{0,5}^{1} \cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t$

   On exploite les résultats du document réponse.

   $$a_n = 4\times\frac{n\pi\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2}{2n^2\pi^2} + 2\times\frac{\sin(n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}$$

   $$= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4}{n^2\pi^2} - \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

   car pour tout n entier non nul, $\sin(n\pi) = 0$.

   Donc $a_n = \dfrac{4\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1\right)}{n^2\pi^2}$.

5.

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	$-0,405$	$-0,203$	$-0,045$	0	$-0,016$	$-0,023$	$-0,008$

Partie B : puissance du signal

1. $\mathrm{P} = \dfrac{2}{2}\displaystyle\int_{0}^{1} (s(t))^2\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{0,5} 4t^2\,\mathrm{d}t + \int_{0,5}^{1} 1\,\mathrm{d}t =$

   $\left[\dfrac{4t^3}{3}\right]_0^{0,5} + [t]_{0,5}^{1} = \dfrac{4 \times 0,125}{3} - 0 + 1 - 0,5 = \dfrac{2}{3}$

2. **a.** On a $\dfrac{99,9}{100} \times \dfrac{2}{3} = 0,666$.

   Calculons les différentes valeurs prises par la variable S pour les comparer à 0,666.

   Pour $n = 0$, $S = 0,5625$

   Pour $n = 1$, $S = 0,6445$

   Pour $n = 2$, $S = 0,6651$

   Pour $n = 3$, $S = 0,6661$

   On a alors $S \geqslant 0,666$, l'algorithme affiche $n = 3$.

   b. La puissance moyenne du signal est atteinte à 99,9 % en prenant la série de Fourier à l'ordre 3.