Corrigé du BTS groupement A - Métropole session 2016

Exercice 1 **7 points**

1. $kR = 0,115 \times 34,8 = 4,002$.

Ainsi $\theta(t) + kR\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t) = Rf(t)$ équivaut à $\theta(t) + 4,002\,\theta'(t) = 0,115f(t)$.

On a alors $\mathscr{L}(\theta(t)) + 4,002\mathscr{L}(\theta'(t)) = 0,115\mathscr{L}(f(t))$

$\Leftrightarrow T(p) + 4,002(pT(p) - \theta(0^+)) = 0,115F(p)$

$\Leftrightarrow T(p) + 4,002pT(p) = 0,115F(p)$

$\Leftrightarrow T(p)(1 + 4,002p) = 0,115F(p)$

$\Leftrightarrow T(p) = \dfrac{0,115}{4,002p+1}F(p)$.

2. a. $F(p) = 522\mathscr{L}(\mathscr{U}(t)) = \dfrac{522}{p}$.

b. On en déduit que $T(p) = \dfrac{0,115}{4,002p+1} \times \dfrac{522}{p} = \dfrac{60,03}{p(4,002p+1)}$.

3. a. $\dfrac{60}{p} - \dfrac{60}{p+0,25} = \dfrac{60(p+0,25)}{p(p+0,25)} - \dfrac{60p}{p(p+0,25)} = \dfrac{60p+15-60p}{p(p+0,25)} = \dfrac{15}{p(p+0,25)}$.

b. On en déduit que :

$\theta(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{60}{p}\right) - \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{60}{p+0,25}\right) = 60\mathscr{U}(t) - 60\mathrm{e}^{-0,25t}\mathscr{U}(t)$.

Donc, pour tout $t \geq 0$,

$\theta(t) = 60 - 60\mathrm{e}^{-0,25t} = 60\left(1 - \mathrm{e}^{-0,25t}\right)$.

4. a. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,25t} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = 60(1-0) = 60$

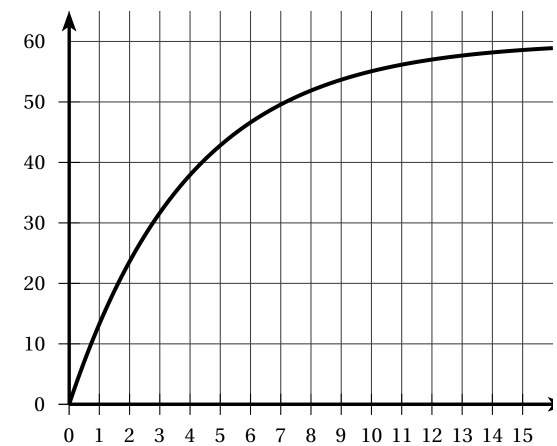
b. La courbe représentative de la fonction θ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 60$.

c. $\theta'(t) = 0,25 \times 60\mathrm{e}^{-0,25t} = 15\mathrm{e}^{-0,25t}$.

Pour $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-0,25t} > 0$ donc $\theta'(t) > 0$.

On en déduit que la fonction θ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

d. Représentation de la fonction θ :



5. a. $60 \times 0,95 = 57$.

$\theta(t) = 57 \Leftrightarrow 60\left(1 - \mathrm{e}^{-0,25t}\right) = 57 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-0,25t} = \dfrac{57}{60} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,25t} = \dfrac{3}{60} \Leftrightarrow -0,25t = \ln(0,05) \Leftrightarrow$

$t = \dfrac{\ln(0,05)}{-0,25} \approx 11,98$.

Donc $\theta(t)$ atteint sa valeur finale au bout de 11,98 s.

b. La température du bain se stabilisera à 77°C , ce qui est conforme aux conditions décrites dans le préambule.

Exercice 2 — 7 points

Partie A

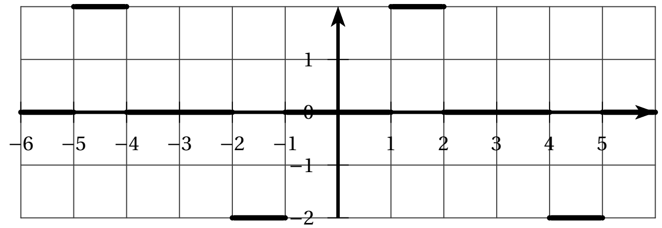
1. $T = 2\pi$ et $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1$.

2. $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} t(2\pi - t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\pi t - t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2\pi}\left[\pi t^2 - \dfrac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\left(4\pi^3 - \dfrac{8\pi^3}{3} - 0\right) = \dfrac{1}{2\pi} \times \dfrac{4\pi^3}{3} = \dfrac{2\pi^2}{3}$.

3. f est paire donc $b_n = 0$ pour $n \geqslant 1$.
Pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} t(2\pi - t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{-2n\pi\cos(n2\pi) + 2\sin(n2\pi)}{n^3} - \dfrac{2\pi}{n^2}\right)$
$= \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{-2n\pi}{n^3} - \dfrac{2\pi}{n^2}\right)$ car, pour $n \geqslant 1$, $\cos(n2\pi) = 1$ et $\sin(n2\pi) = 0$ (voir cercle trigonométrique).
Ainsi $a_n = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{-2\pi}{n^2} - \dfrac{2\pi}{n^2}\right) = \dfrac{1}{\pi} \times \dfrac{-4\pi}{n^2} = \dfrac{-4}{n^2}$

Partie B

1. Représentation de la fonction u sur l'intervalle $[-6 ; 6]$:



2. $U_{\text{moy}} = 0$ car la fonction u est impaire.

3. $U_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{6}\displaystyle\int_0^6 u^2(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{6}\int_0^3 u^2(t)\,\mathrm{d}t$ car la fonction u est impaire.
$U_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^2 4\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{3}[4t]_1^2 = \dfrac{1}{3}(8-4) = \dfrac{4}{3} \approx 1,33$
Donc $U_{\text{eff}} = \sqrt{\dfrac{4}{3}} \approx 1,15$

Partie C

1. L'identification du développement permet d'obtenir :
$a_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $a_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$ et $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour n entier supérieur ou égal à 1.

2. $S_2(t) = \dfrac{\pi}{4} + a_1\cos(t) + b_1\sin(t) + a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t)$.
On a $a_1 = \dfrac{-1-1}{\pi} = \dfrac{-2}{\pi}$, $a_2 = \dfrac{1-1}{4\pi} = 0$, $b_1 = \dfrac{(-1)^2}{1} = 1$, $b_2 = \dfrac{(-1)^3}{2} = 0,5$.
On a alors $S_2(t) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{-2}{\pi}\cos(t) + \sin(t) + 0,5\sin(2t)$.

3. $A_0 = |a_0| = \dfrac{\pi}{4} \approx 0,79$ donc les spectres 1 et 4 ne conviennent pas.

$A_1 = \sqrt{\dfrac{4}{\pi^2}+1} \approx 1,19$ donc le spectre 2 ne convient pas.

Seul le spectre 3 peut être associé à f.

Exercice 3 **6 points**

PARTIE A

1. On prélève 75 cellules dans des conditions identiques et indépendantes. Chaque prélèvement possède deux issues, le succès étant "la cellule est inutilisable" de probabilité $p = 0,015$. La variable aléatoire X, qui compte le nombre de cellules inutilisables, suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 75$ et $p = 0,015$.
2. $P(X = 0) \approx 0,322$
3. Pour pouvoir fabriquer un panneau, le lot doit contenir au plus 3 cellules inutilisables.
   $P(X \leqslant 3) \approx 0,973$

PARTIE B

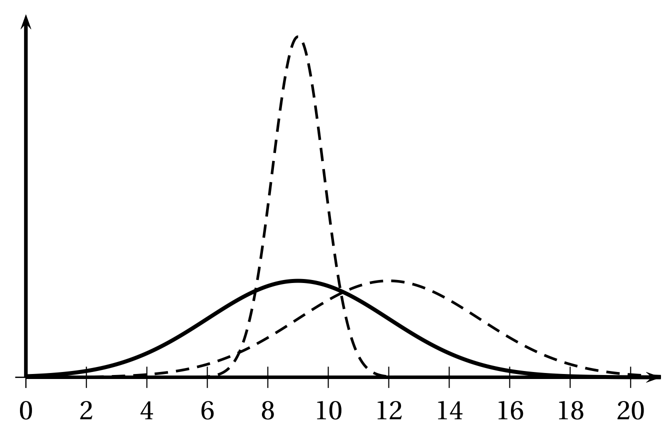
1. Tableau d'effectifs :

	E	$\overline{E}$	total
S	2	3	5
$\overline{S}$	8	487	495
total	10	490	500

2. $p\left(\overline{E \cup S}\right) = p\left(\overline{E} \cap \overline{S}\right) = \dfrac{487}{500} = 0,974$
3. $p(E) = \dfrac{10}{500} = 0,02$, $p(S) = \dfrac{5}{500} = 0,01$
   et $p(E \cap S) = \dfrac{2}{500} = 0,004 \neq 0,02 \times 0,01$ donc E et S ne sont pas indépendants.

PARTIE C

1. $P(6 \leqslant Y \leq 12) \approx 0,683$.
2. La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \mu$, soit $x = 9$ et l'aire sous la courbe sur $[6 ; 12]$ doit être égale à 0,683 environ. Une seule courbe convient :



3. **a.** $P(Y \geqslant 10) \approx 0,369$

   b. On cherche y tel que $P(Y \geqslant y) \approx 0,9$. La calculatrice donne : $y \approx 5,2$ kWh.