Corrigé du brevet de technicien supérieur - Métropole session 2017 groupement A2

Exercice 1

Partie A : Étude de la vitesse de rotation du moteur lors de son démarrage

1. **a.** A l'instant $t = 0$, $\omega = 0$ tour/s.
   b. A l'instant $t = 1$, $\omega = 9$ tour/s.
   c. La vitesse de rotation semble se stabiliser à $\omega_S = 15$ tour/s.
   d. 95% de la vitesse stabilisée donne : $0,95 \times 15 = 14,25$s. Graphiquement, on lit $t = 2,3$ pour $\omega = 14,25$ tour/s.
   Donc la vitesse atteint 95% de la vitesse stabilisée au bout de 2,3s.
2. **a.** ω est de la forme $15 - uv$ où u et v sont définies par $u(t) = 30t + 15$ et $v(t) = \mathrm{e}^{-2t}$.
   On a alors $\omega' = 0 - \left(u'v + uv'\right)$ où u' et v' sont définies par $u'(t) = 30$ et $v'(t) = -2\mathrm{e}^{-2t}$.
   Ainsi, pour tout $t \geq 0$, on a
   $\omega'(t) = -\left(30\mathrm{e}^{-2t} - 2(30t + 15)\mathrm{e}^{-2t}\right) = -30\mathrm{e}^{-2t} + 60t\mathrm{e}^{-2t} + 30\mathrm{e}^{-2t} = 60t\mathrm{e}^{-2t}$.
   b. Pour tout $t \geq 0$, on a $60t \geq 0$ et $\mathrm{e}^{-2t} > 0$. Donc sur $[0\,;\,+\infty[$, $\omega'(t) \geqslant 0$ et la fonction ω est croissante.
   c. $\omega'(0) = 0$. Donc la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B : Résolution d'une équation différentielle permettant d'obtenir la vitesse de rotation

1. On résout l'équation caractéristique associée : $\dfrac{1}{4}r^2 + r + 1 = 0$
   On a $\Delta = 1^2 - 4 \times \dfrac{1}{4} \times 1 = 0$ donc l'équation admet une solution : $r = \dfrac{-1}{2 \times \dfrac{1}{4}} = \dfrac{-1}{\dfrac{1}{2}} = -2$.
   Les solutions de l'équation homogène sont : $t \longmapsto (At + B)\mathrm{e}^{-2t}$, avec A et B constantes réelles.
2. g est constante donc $g'(t) = g''(t) = 0$. On a alors : $\dfrac{1}{4}g''(t) + g'(t) + g(t) = \dfrac{\mathrm{U}}{k}$. L'égalité est vérifiée dont la fonction g est une solution de l'équation (E).
3. Les solutions de l'équation différentielle de (E) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto (At+B)\mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{\mathrm{U}}{k}$ avec A et B constantes réelles (solutions=solutions de l'équation homogène + solution particulière) .

4. On a $\dfrac{\mathrm{U}}{k} = \dfrac{10}{\dfrac{2}{3}} = 15$.

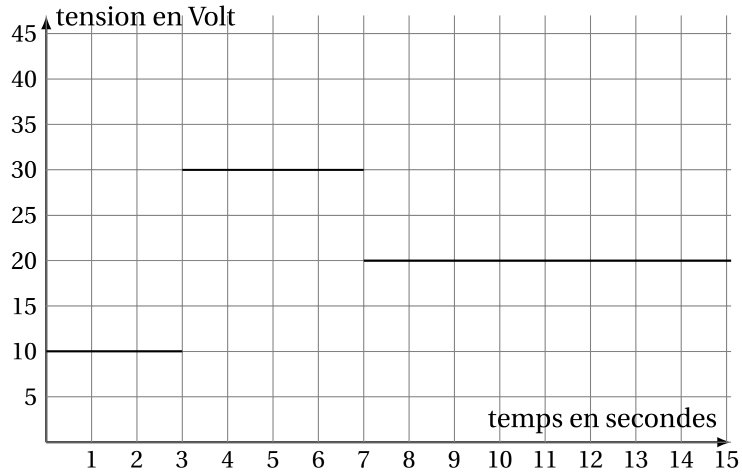
Dans ce cas, $\omega(t) = 15 - (30t + 15)\mathrm{e}^{-2t}$ est bien de la forme $(At + B)\mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{\mathrm{U}}{k}$ en prenant $A = -30$ et $B = -15$.
De plus, $\omega(0) = 15 - 15\mathrm{e}^{0} = 0$ et $\omega'(0) = 0$.
Donc la fonction ω est bien la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Partie C : Détermination de la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu à partir des principes de la physique

1. On a $\Delta = 0,36^2 - 4 \times 0,09 \times 1 = -0,2304 < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :
$z_1 = \dfrac{-0,36 + j\sqrt{0,2304}}{2 \times 0,09} = \dfrac{-0,36 + 0,48j}{0,18} = -2 + \dfrac{8}{3}j$ et $z_2 = -2 + \dfrac{8}{3}j$.
2. De ce qui précède, on déduit que les solutions de l'équation homogène associée à (E_1) sont définies sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto \mathrm{e}^{-2t}\left(A\cos\left(\dfrac{8}{3}t\right) + B\sin\left(\dfrac{8}{3}t\right)\right)$, avec A et B constantes réelles.
De plus la fonction constante définie par $f(t) = 15$ est une solution particulière de l'équation (E_1).
Donc les solutions de l'équation (E_1) sont définies sur $\mathbb{R}$ par
$t \longmapsto 15 + \mathrm{e}^{-2t}\left(A\cos\left(\dfrac{8}{3}t\right) + B\sin\left(\dfrac{8}{3}t\right)\right)$, avec A et B constantes réelles.
Les fonctions 1 et 3 ne sont pas de cette forme, elles ne conviennent pas.
En 0, la fonction 4 vaut $15 - \mathrm{e}^{0}(\cos(0) + 0) = 14$. La condition initiale $y(0) = 0$ n'est pas vérifiée donc la fonction 4 ne convient pas.
Donc la fonction 2 est la solution cherchée.
3. La vitesse maximale du moteur est d'environ 16,5 tour/s, elle est atteinte après environ 1,2s.

Partie D : Comportement d'un moteur soumis à différents sauts de tension

1. Les tensions ont été modifiées à $t = 3s$ et à $t = 7s$.
2. Document réponse :



3. **a.** Document réponse :

t	$-\infty$ 0	3	7	$+\infty$
$10\mathscr{U}(t)$	0	10	10	10
$30\mathscr{U}(t-3)$	0	0	30	30
$-20\mathscr{U}(t-7)$	0	0	0	-20
$e(t)$	0	10	40	20

b. Dans le tableau, sur $[3;7]$, $e(t) = 40V$ et non $30V$. L'expression est donc inexacte.

c. $e(t) = 10\mathscr{U}(t) + 20\mathscr{U}(t-3) - 10\mathscr{U}(t-7)$.

Exercice 2

PARTIE A :

1. La courbe 3 représente la fonction f.

2. **a.** f est paire donc $b_n = 0$ pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 1.

b. Montrons que $g'(t) = t\sin t$ pour tout réel t :
$-t\cos(t)$ est de la forme uv où u et v sont définies par $u(t) = -t$ et $v(t) = \cos t$.
On a alors $g' = u'v + uv' + (\sin t)'$ où u' et v' sont définies par $u'(t) = -1$ et $v'(t) = -\sin t$.
Ainsi $g'(t) = -\cos t + t\sin t + \cos t = t\sin t$. Donc g est une primitive de $t \longmapsto t\sin t$.

c. $a_0 = \frac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\left[g(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}\left[-t\cos t + \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}\left(-\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} + \sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$.

3. $a_1 = \frac{2}{\pi}(-1)\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{1^2}\right) = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{9}+1\right) = \frac{-20}{9\pi} \simeq -0,707$
$a_2 = \frac{2}{\pi}(-1)^2\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3^2}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{9}\right) = \frac{68}{225\pi} \simeq 0,096$

4. **a.** $f_e^2 \simeq a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2}\left(a_n^2+b_n^2\right) \simeq \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \frac{1}{2}(0,707^2+0,096^2) \simeq 0,659817$. Donc $f_e \simeq 0,812$

   b. f_e est la valeur efficace du signal sur une période.

PARTIE B :

1. **a.** On a $n = 10$ et $p = 0,02$.

   b. $p_1 = P(X=0) \simeq 0,817$

   c. $p_2 = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) \simeq 1 - 0,817 - 0,167 \simeq 0,016$

2. **a.** $P(14,4 \leq D \leq 15,9) \simeq 1 - 0,0098 - 0,0038 \simeq 0,9864$

   b. On sait que $P(\mu - 2\sigma \leq D \leq \mu + 2\sigma) = 0,95$.
   On choisit $\mathrm{L}_{\mathrm{S}_1} = \mu - 2\sigma = 15,20 - 2\times 0,3 = 14,6$ et $\mathrm{L}_{\mathrm{S}_2} = \mu + 2\sigma = 15,20 + 2\times 0,3 = 15,8$.

3. **a.** $d = \frac{15,1\times 1 + 15,12\times 2 + 15,14\times 3 + 15,16\times 4 + 15,18\times 3 + 15,2\times 2 + 15,22\times 2 + 15,24\times 1 + 15,26\times 1 + 15,28\times 1}{20} = 15,178$

   b. $d \in [\mathrm{L}_{\mathrm{S}_1};\mathrm{L}_{\mathrm{S}_2}]$ donc le service de maintenance n'intervient pas.