Corrigé du Brevet de technicien supérieur groupement B1
10 mai 2021 - Métropole–Antilles–Guyane–Polynésie

Exercice 1 — 10 points

Une étude est menée concernant le train d'atterrissage d'un certain type d'hélicoptère. Ce train d'atterrissage est composé d'une roue et d'un amortisseur oléopneumatique permettant d'absorber l'énergie de l'impact au moment de l'atterrissage. On note $f(t)$ la hauteur, en mètre, du centre de gravité de l'hélicoptère par rapport au sol à l'instant t exprimé en seconde. On suppose que f est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

A. Résolution d'une équation différentielle

Une étude mécanique montre que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E): \quad y'' + 3y' + 2y = 4,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. **a.** On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $r^2 + 3r + 2 = 0$,

   $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$; l'équation admet donc 2 solutions

   $r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+1}{2} = -1$ et $r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-1}{2} = -2$.

   b. Soit (E_0) l'équation différentielle $y'' + 3y' + 2y = 0$.

   D'après le cours, on peut dire que l'équation (E_0) admet pour solutions les fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par $y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 t}$ c'est-à-dire $y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \mu\,\mathrm{e}^{-2t}$, où λ et μ sont deux réels quelconques..

2. Soit k un nombre réel. On définit la fonction constante g sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = k$.

   La fonction g est solution de (E) si et seulement si $g''(t) + 3g'(t) + 2g(t) = 4$;

   $g(t) = k$ donc $g'(t) = 0$ et $g''(t) = 0$.

   On arrive à $2k = 4$ donc $k = 2$.

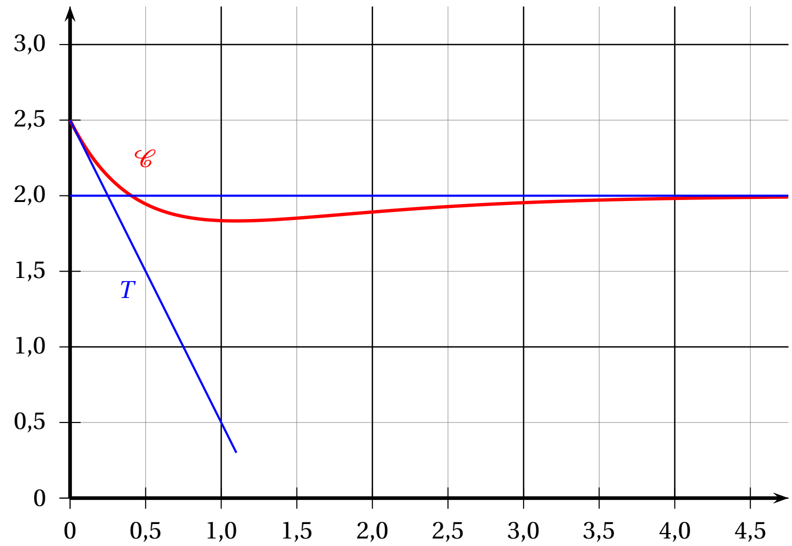
3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est donc l'ensemble des fonctions définies par $y(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-t} + \mu\,\mathrm{e}^{-2t} + 2$.

B. Étude de la fonction *f*

On admet que la fonction f correspondant à la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 1{,}5\,\mathrm{e}^{-2t} + 2$.

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

1. La hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère au moment de l'atterrissage à l'instant $t = 0$ est $f(0) = -\mathrm{e}^{0} + 1{,}5\,\mathrm{e}^{0} + 2 = 2{,}5$.
2. On admet que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-2t} = 0$.



a. On peut donc en déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 2$.

b. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ la droite asymptote d'équation $y = 2$.

3. **a.** À l'aide du graphique, on peut dire que la fonction f semble décroissante sur $[0 ; 1[$ puis croissante sur $]1 ; +\infty[$.

b. Un logiciel de calcul formel donne ci-dessous une expression de la dérivée f' de la fonction f.

1	$f(t) : -\mathrm{e}^{-t} + 1{,}5\,\mathrm{e}^{-2t} + 2$ $\to f(t) := -\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t} + 2$
2	Dérivée$(f(t),t)$ $\to \mathrm{e}^{-t} - 3\,\mathrm{e}^{-2t}$

$$f'(t) = \mathrm{e}^{-t} - 3\,\mathrm{e}^{-2t} = \mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-2t}} - 3\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{\mathrm{e}^{-2t}}\right) = \mathrm{e}^{-2t}\left(\mathrm{e}^{t} - 3\right)$$

c. On résout sur $[0 ; +\infty]$ l'inéquation $\mathrm{e}^{t} - 3 \geqslant 0$.

$\mathrm{e}^{t} - 3 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{t} \geqslant 3 \iff t \geqslant \ln(3)$

d. On détermine le signe de $f'(t)$ sur $[0 ; +\infty]$.

t	0	$\ln(3)$	$+\infty$
e^{-2t}	$+$		$+$
$\mathrm{e}^{t} - 3$	$-$	0	$+$
$f'(t)$	$-$	0	$+$

e. $f(0) = 2{,}5$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 2$

$$f(\ln(3)) = -\mathrm{e}^{-\ln(3)} + 1{,}5\,\mathrm{e}^{-2\ln(3)} + 2 = -\left(\mathrm{e}^{\ln(3)}\right)^{-1} + 1{,}5\left(\mathrm{e}^{\ln(3)}\right)^{-2} + 2 = -\frac{1}{3} + 1{,}5 \times \frac{1}{9} + 2$$
$$= \frac{11}{6} \approx 1{,}83$$

On dresse le tableau de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty]$.

t	0		$\ln(3)$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$2{,}5$	$\searrow$	$\frac{11}{6}$	$\nearrow$	2

Étude locale

On rappelle que la fonction f est définie sur $[0\,;\,+\infty]$ par $f(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 1{,}5\,\mathrm{e}^{-2t} + 2$

et que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée dans la partie B.

Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de zéro.

3	PolynômeTaylor($f(t)$,t,0,2)
	$\rightarrow \frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2$

1. **a.** Le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de 0 est :

$\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2$	$\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0$	$\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

La bonne réponse est : $\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$.

b. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est :

$y = \frac{5}{2}$	$y = \frac{5}{2} - 2t$	$y = \frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2$

La bonne réponse est : $y = \frac{5}{2} - 2t$.

2. Pour étudier la position relative, au voisinage du point d'abscisse 0, de la courbe $\mathscr{C}$ et de la tangente T, on étudie le signe de $f(t) - \left(\frac{5}{2} - 2t\right)$ au voisinage de 0.

En utilisant de développement limité de f au voisinage de 0, cela revient à étudier le signe de $\left(\frac{5}{2} - 2t + \frac{5}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)\right) - \left(\frac{5}{2} - 2t\right)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$.

$\left(\dfrac{5}{2}-2t+\dfrac{5}{2}t^2+t^2\varepsilon(t)\right)-\left(\dfrac{5}{2}-2t\right)=\dfrac{5}{2}t^2+t^2\varepsilon(t)=t^2\left(\dfrac{5}{2}+\varepsilon(t)\right)$

Or $\varepsilon(t)$ tend vers 0, donc pour t assez proche de 0, on aura $\dfrac{5}{2}+\varepsilon(t)>0$ donc $t^2\left(\dfrac{5}{2}+\varepsilon(t)\right)>0$; au voisinage du point d'abscisse 0, la courbe $\mathscr{C}$ est donc au-dessus de la tangente T.

EXERCICE 2 — 10 points

A. Loi binomiale

Une enquête réalisée auprès d'une grande enseigne de garages automobile permet d'admettre que la probabilité qu'une voiture prélevée au hasard parmi les garages de cette enseigne soit réparée et rendue à son propriétaire le jour même de sa réception est 0,7. On interroge 100 clients au hasard de cette enseigne. Le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler ce sondage à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 clients ainsi interrogés, associe le nombre de clients dont le véhicule est restitué le jour même.

1. L'expérience consiste en la répétition de 100 épreuves identiques qui n'ont que deux issues ; la variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit donc la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0{,}7$.
2. L'espérance de X est $E(X)=np=100\times 0{,}7=70$; cela veut dire que sur un échantillon de 100 clients, il y en a en moyenne 70 dont le véhicule est restitué le jour même.
3. L'écart type de la variable aléatoire X est $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{100\times 0{,}7\times 0{,}3}=\sqrt{21}\approx 4{,}6$.
4. La probabilité que, sur un échantillon aléatoire de 100 clients, exactement 60 clients aient récupéré leur voiture le jour même est :

   $P(X=60)=\dbinom{100}{60}\times 0{,}7^{60}\times(1-0{,}7)^{100-60}\approx 0{,}008.$

B. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X définie dans la partie A par la loi normale de moyenne 70 et d'écart type 4,6. On note Y une variable aléatoire de loi normale de moyenne 70 et d'écart type 4,6.

1. La probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'au moins 80 voitures, sur un échantillon de taille 100, soient restituées à leur propriétaire le jour même, est $P(Y\geqslant 79{,}5)\approx 0{,}019$.
2. La probabilité, arrondie à 10^{-3}, que le nombre de voitures, sur un échantillon de taille 100, restituées à leur propriétaire le jour même soit compris entre 60 et 80, est $P(59{,}5\leqslant Y\leqslant 80{,}5)\approx 0{,}978$.

C. Probabilités conditionnelles

Un garage de cette enseigne possède deux ateliers. Les véhicules qu'il répare sont traités, soit par l'atelier 1, soit par l'atelier 2.
L'atelier 1 répare 60 % des véhicules et le reste est réparé par l'atelier 2.
Suite aux réparations, 1 % des véhicules provenant de l'atelier 1 présentent un défaut de réparation et 2,5 % de ceux provenant de l'atelier 2 présentent un défaut de réparation.
On prélève au hasard un véhicule parmi ceux ayant été réparés dans ce garage.

On définit les évènements suivants :

- A : « le véhicule provient de l'atelier 1 » ;
- B : « le véhicule provient de l'atelier 2 » ;
- D : « le véhicule présente un défaut de réparation ».

1. - L'atelier 1 répare 60 % des véhicules donc $P(A) = 0{,}6$.
   - L'atelier 2 répare le reste soit 40 % des véhicules donc $P(B) = 0{,}4$.
   - Suite aux réparations, 1 % des véhicules provenant de l'atelier 1 présentent un défaut de réparation donc $P_A(D) = 0{,}01$.
   - Suite aux réparations, 2,5 % des véhicules provenant de l'atelier 2 présentent un défaut de réparation donc $P_B(D) = 0{,}025$.
2. $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}6 \times 0{,}01 = 0{,}006$

   $P(B \cap D) = P(B) \times P_B(D) = 0{,}4 \times 0{,}025 = 0{,}01$

   La probabilité qu'un véhicule présente un défaut de réparation est $P(D)$. D'après la formule des probabilités totales : $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0{,}006 + 0{,}01 = 0{,}016$.

D. Intervalle de confiance

Cette grande enseigne de garages automobile organise une enquête de satisfaction auprès de ses clients. Elle voudrait estimer la proportion inconnue p de clients satisfaits.
Pour cela, elle interroge au hasard un échantillon de 100 clients parmi l'ensemble de sa clientèle. Cette clientèle est suffisamment importante pour considérer que cet échantillon résulte d'un tirage avec remise.
Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon ainsi prélevé, associe la fréquence, dans cet échantillon, des clients satisfaits. On suppose que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}}$.
Pour l'échantillon prélevé, on constate que 87 clients sont satisfaits.

1. Une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p est $f = \dfrac{87}{100} = 0{,}87$.
2. Un intervalle de confiance centré sur f de p avec le coefficient de confiance 95 % est :

   $$\left[f - 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{100}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\frac{f(1-f)}{100}}\right]$$
   $$= \left[0{,}87 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}87(1-0{,}87)}{100}}\ ;\ 0{,}87 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}87(1-0{,}87)}{100}}\right] \approx [0{,}804\ ;\ 0{,}936]$$