∽ Corrigé du Brevet de technicien supérieur ∾ Métropole – mai 2021 – Groupement C1

Exercice 1 **10 points**

L'entreprise Boisneuf fabrique des charpentes en bois. Elle souhaite étudier la déformation des pièces de bois qu'elle utilise pour ses charpentes lorsque celles-ci sont soumises à une charge constante. Le jour de l'installation la poutre ne subit aucune déformation.

On considère alors la fonction f, définie sur $[0~;~+\infty[$, représentant la déformation en millimètres (mm) de la poutre en fonction du temps t exprimé en jours à partir de l'installation.

Partie A

1. Le jour 0, il n'y a aucune déformation donc $f(0) = 0$.
2. L'étude physique du phénomène de déformation (dans l'hypothèse où la pièce de bois étudiée ne présente pas de défaut de structure) montre que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $\quad 400y' + 5y = 20$.

   a. D'après le cours, l'équation différentielle $ay' + by = 0$ a pour solutions les fonctions $t \longmapsto k\,\text{e}^{-\frac{b}{a}t}$ où k est un réel quelconque.

   Donc l'équation différentielle (E_0) : $\quad 400y' + 5y = 0$ a pour solutions les fonctions $t \longmapsto k\,\text{e}^{-\frac{5}{400}t}$ où k est un réel quelconque, soit les fonctions $t \longmapsto k\,\text{e}^{-0,0125t}$ où k est un réel quelconque.

   b. Si y est une fonction constante solution de (E), on a à la fois $400y' + 5y = 20$ et $y' = 0$; on en déduit que $5y = 20$ donc que $y = 4$.

   La fonction $t \longmapsto 4$ est la solution constante de (E).

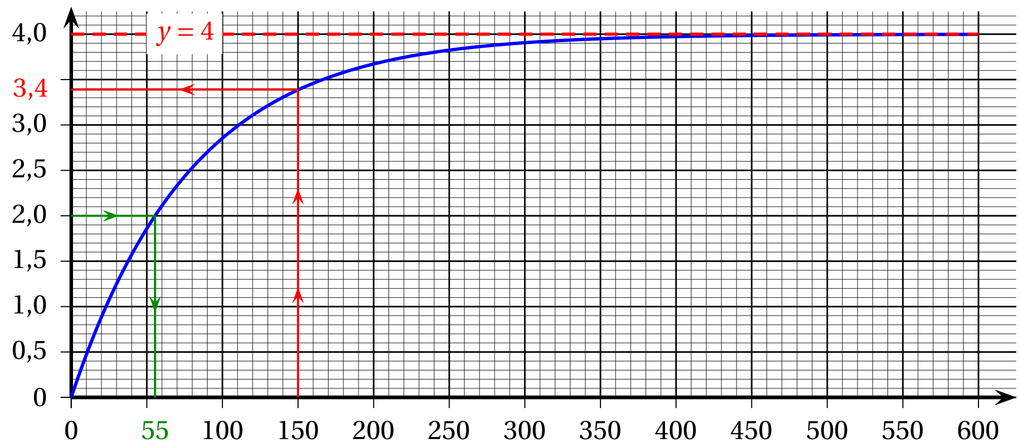
   c. D'après le cours, la solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) et d'une solution particulière de (E) ; donc la solution générale de (E) est de la forme $t \longmapsto 4 + k\,\text{e}^{-0,0125t}$ où k est un réel quelconque.

   d. La fonction f solution de (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$ est telle que $4 + k\,\text{e}^{0} = 0$; donc $k = -4$ et donc $f(t) = 4 - 4\,\text{e}^{-0,0125t}$.

Partie B

On admet que pour tout t positif, $\quad f(t) = 4\left(1 - \text{e}^{-0,0125t}\right)$.

1. Avec la précision permise par le graphique, on peut dire que la déformation au bout de 150 jours est d'environ 3,4 mm.
2. Avec la précision permise par le graphique, on peut dire que le nombre de jours nécessaire pour que la déformation atteigne 2 mm est d'environ 55.



3. La déformation limite de la poutre à long terme est $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

On sait que $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \mathrm{e}^{-T} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,0125t} = 0$, et donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 4$.

La déformation limite de la poutre à long terme est donc de 4 mm.

On en déduit que la courbe représentant la fonction f admet la droite d'équation $y = 4$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. Pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $f(t) = 4 - 4\,\mathrm{e}^{-0,0125t}$ donc
$f'(t) = 0 - 4 \times (-0,0125)\,\mathrm{e}^{-0,0125t} = 0,05\,\mathrm{e}^{-0,0125t}$

5. Pour tout T, on sait que $\mathrm{e}^{T} > 0$, donc pour tout t, $\mathrm{e}^{-0,0125t} > 0$ donc $f'(t) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

6. Le nombre de jours à partir duquel la déformation atteint 90 % de sa valeur limite est le plus petit t tel que $f(t) \geqslant 0,9 \times 4$; on résout cette inéquation.

$$f(t) \geqslant 0,9\times 4 \iff 4\left(1-\mathrm{e}^{-0,0125t}\right) \geqslant 0,9\times 4 \iff 1-\mathrm{e}^{-0,0125t} \geqslant 0,9 \iff 0,1 \geqslant \mathrm{e}^{-0,0125t}$$
$$\iff \ln(0,1) \geqslant -0,0125t \iff -\frac{\ln(0,1)}{-0,0125} \leqslant t$$

$-\dfrac{\ln(0,1)}{-0,0125} \approx 184,2$ donc c'est le 185$^{\text{e}}$ jour que la déformation atteint 90 % de sa valeur limite.

Exercice 2 **10 points**

Partie A

La scierie Bonbois réalise une étude sur sa production de planches. En sortie de production, elle constate deux types de défaut : des défauts de structure (nœuds, ...) et des défauts de rugosité de surface.

On prélève au hasard une planche dans la production de l'entreprise. On note les évènements suivants :

- S : « La planche présente un défaut de structure. », de probabilité 0,03 ;
- R : « La planche présente un défaut de rugosité. », de probabilité 0,05.

On admet que les évènements S et R sont indépendants.

1. L'évènement « La planche présente les deux défauts » est l'événement « La planche présente un défaut de structure et la planche présente un défaut de rugosité. ».
   C'est donc l'événement $S \cap R$.

   Les évènements S et R sont indépendants donc
   $P(S \cap R) = P(S) \times P(R) = 0,03 \times 0,05 = 0,001\,5$.
2. L'évènement $\overline{S} \cap \overline{R}$ décrit « La planche ne possède pas de défaut de structure et la planche ne possède pas de défaut de rugosité. » .
   Autrement dit : « La planche ne possède aucun défaut. » .

   $P\left(\overline{S}\right) = 1 - P(S) = 1 - 0,03 = 0,97$ et $P\left(\overline{R}\right) = 1 - P(R) = 1 - 0,05 = 0,95$

   Les évènements S et R sont indépendants donc les événements $\overline{S}$ et $\overline{R}$ le sont aussi, donc : $P\left(\overline{S} \cap \overline{R}\right) = P\left(\overline{S}\right) \times P\left(\overline{R}\right) = 0,97 \times 0,95 = 0,921\,5$.
3. L'évènement D : « La planche présente au moins un défaut. » est l'événement contraire de « La planche ne présente aucun défaut/ ».

   Donc $P(D) = 1 - P\left(\overline{S} \cap \overline{R}\right) = 1 - 0,921\,5 = 0,078\,5$.
4. On choisit une planche présentant au moins un défaut; la probabilité p qu'elle présente les deux défauts est : $p = P_D(S \cap R) = \dfrac{P\left((S \cap R) \cap D\right)}{P(D)}$.

   Mais si une planche possède les deux défauts, ça signifie qu'elle possède au moins un défaut donc $S \cap R \subset D$ et donc $(S \cap R) \cap D = S \cap R$.

   On en déduit que $p = \dfrac{P(S \cap R)}{P(D)} = \dfrac{0,001\,5}{0,078\,5} \approx 0,02$.

Partie B

On admet pour la suite que la probabilité qu'une planche présente au moins un défaut est de 0,078 5. On prélève au hasard 15 planches dans le stock de l'entreprise. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 15 planches, associe le nombre de planches qui présentent au moins un défaut.

1. Une planche n'a que deux possibilités : elle présente au moins un défaut, avec une probabilité $p = 0,078\,5$, ou elle ne présente aucun défaut, avec une probabilité $1 - p = 0,921\,5$.

   On prélève au hasard 15 planches dans le stock de l'entreprise. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

   Donc la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 15 planches, associe le nombre de planches qui présentent au moins un défaut suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0,078\,5$.
2. La probabilité que, dans un tel prélèvement, exactement deux planches présentent au moins un défaut est : $P(X = 2) = \dbinom{15}{2} \times 0,078\,5^2 \times (1 - 0,078\,5)^{15-2} \approx 0,224$.

3. On cherche la probabilité que, dans un tel prélèvement, 12 planches au moins ne présentent aucun des deux défauts.

Si 12 planches au moins ne présentent aucun défaut, cela signifie que 3 planches au plus présentent au moins un défaut.

La probabilité de cet événement est donc : $P(X \leqslant 3) \approx 0{,}974$.

Partie C

Une entreprise de meubles commande des planches de longueur 2 mètres à la scierie Bonbois. La scierie affirme que 94 % des planches de sa production sont conformes en longueur. L'entreprise doute de cette affirmation et réalise un test d'hypothèse bilatéral au seuil de risque de 5 % pour vérifier.

On note l'hypothèse H_0 : « $p = 0{,}94$ ».

On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 planches prélevées au hasard dans la production de la scierie, associe la fréquence des planches conformes.

On admet que, sous l'hypothèse H_0, la variable aléatoire F suit la loi normale de moyenne 0,94 et d'écart-type $\sqrt{\dfrac{0{,}94(1-0{,}94)}{100}}$.

1. Sous l'hypothèse H_0, l'intervalle $[m\ ;\ M]$ centré en 0,94 tel que $p(m \leqslant F \leqslant M) = 0{,}95$ est, d'après le cours, l'intervalle
$I = \left[0{,}94 - 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}94(1-0{,}94)}{100}}\ ;\ 0{,}94 + 1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}94(1-0{,}94)}{100}}\right] \approx [0{,}89\ ;\ 0{,}99]$.

2. L'hypothèse alternative H_1 du test est : « $p \neq 0{,}94$ ».

3. On peut énoncer la règle de décision :

- si la proportion de planches conformes dans l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation I, alors on rejette l'hypothèse nulle, au risque de 5 % ;
- sinon, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle.

4. Sur un échantillon de 100 poutres, on a compté 92 planches conformes en longueur, ce qui fait une fréquence de 0,92.

$0{,}92 \in [0{,}89\ ;\ 0{,}99]$ donc il n'y a pas de raison de rejeter l'hypothèse nulle, au risque de 5 %. L'entreprise n'a donc pas de raison de douter de l'affirmation de la scierie.