Corrigé du BTS Groupement D [1] – 16 mai 2022

Métropole – Antilles–Guyane – Polynésie

EXERCICE 1 **10 points**

On s'intéresse dans cet exercice à l'évolution, dans un pays de 60 millions d'habitants, du nombre de personnes équipées d'un certain implant médical.

Partie A

Le tableau ci-dessous indique le nombre de personnes de ce pays équipées de l'implant médical depuis 2013.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang de l'année k_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de personnes N_i (en milliers) équipées de l'implant	56,25	58,1	60,5	63	65,8	68,7	72	75,5	79,3

On décide de modéliser cette évolution par une fonction exponentielle et pour cela on effectue le changement de variable $y = \ln(N - 30)$.

1. On complète le tableau suivant en arrondissant les valeurs au millième.

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021
Rang de l'année k_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de personnes N_i (en milliers) équipées de l'implant	56,25	58,1	60,5	63	65,8	68,7	72	75,5	79,3
$y_i = \ln(N_i - 30)$	3,628	3,336	3,418	3,497	3,578	3,656	3,738	3,818	3,898

2. **a.** À l'aide de la calculatrice, on détermine une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i\left(k_i,\ y_i\right)$ par la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients au centième : $y = 0{,}08k + 3{,}26$.

   b. $y_i = \ln(N_i - 30)$ signifie que $y = \ln(N(k) - 30)$.

   $$y = 0{,}08k + 3{,}26 \iff \ln(N(k) - 30) = 0{,}08k + 3{,}26 \iff N(k) - 30 = \mathrm{e}^{0{,}08k+3{,}26}$$
   $$\iff N(k) = 30 + \mathrm{e}^{0{,}08k} \times \mathrm{e}^{3{,}26} \iff N(k) = 30 + 26{,}05\,\mathrm{e}^{0{,}08k}$$

1. Analyses de biologie médicale, Bio analyses et contrôles, Biotechnologies, Europlastics et composites, Bioqualité

3. On formule l'hypothèse que le modèle proposé reste valide plusieurs années encore.

a. L'année 2026 correspond au rang $k = 13$; $N(13) = 30 + 26{,}05\,\text{e}^{0{,}08\times 13} \approx 104$

Le nombre de personnes, au millier près, équipées de l'implant médical dans ce pays en 2026 est estimé à 104 milliers.

b. On suppose que le nombre d'habitants du pays reste stable sur le long terme.

$\lim\limits_{k\to+\infty} 0{,}08k = +\infty$ et $\lim\limits_{K\to+\infty} \text{e}^{K} = +\infty$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \text{e}^{0{,}08k} = +\infty$

On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} N(k) = +\infty$.

Donc au bout d'un certain nombre d'années, le nombre $N(k)$ de personnes équipées de l'implant médical sera supérieur à la population du pays qui reste stable à 60 millions ; ce n'est pas possible donc ce modèle n'est pas pertinent à long terme.

Partie B

1. Dans cette question, on considère la fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ qui vérifie $g(0) = 8$ et qui est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$(E) : \quad y' + 0{,}05y = 0{,}05$$

a. Soit l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + 0{,}05y = 0$.

On sait que l'équation différentielle $ay' + by = 0$ a pour solutions les fonctions g_0 définies par $g_0(t) = k\,\text{e}^{-\frac{b}{a}t}$ où $k \in \mathbf{R}$; donc l'équation différentielle $y' + 0{,}05y = 0$ a pour solutions les fonctions g_0 définies par $g_0(t) = k\,\text{e}^{-0{,}05t}$ où $k \in \mathbf{R}$.

b. Soit y une solution constante de l'équation différentielle (E).

Alors $y' = 0$ et l'équation devient : $0{,}05y = 0{,}05$ donc $y = 1$.

$y = 1$ est une solution constante de l'équation différentielle (E).

c. Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'équation différentielle (E) a donc pour solutions les fonctions g définies par : $g(t) = k\,\text{e}^{-0{,}05t} + 1$.

d. On rappelle que $g(0) = 8$.

$g(0) = 8 \iff k\,\text{e}^{-0{,}05\times 0} + 1 = 8 \iff k + 1 = 8 \iff k = 7$

On en déduit que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a : $g(t) = 1 + 7\,\text{e}^{-0{,}05t}$.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{450}{1 + 7\,\text{e}^{-0{,}05t}}$.

On admet que cette fonction permet de modéliser l'évolution du nombre de personnes équipées de l'implant médical dans ce pays.

Plus précisément, $f(t)$ représente le nombre de personnes, exprimé en milliers, équipées de l'implant médical dans ce pays en fonction du temps t mesuré en années depuis 2013.

2. Selon ce modèle, le nombre de personnes qui seront équipées de l'implant médical en 2026 est, en milliers $f(13) \approx 96{,}68$ soit, arrondi au millier, 97.
3. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -0{,}05t = -\infty$ et $\displaystyle\lim_{T\to-\infty} \mathrm{e}^{T} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}05t} = 0$

   On en déduit que : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \left(1+7\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}\right) = 1$ et que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{450}{1+7\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}} = 450.$

   Donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 450$

   Cela veut dire que, lorsque le nombre d'années augmentera, le nombre de personnes équipées de l'implant tendra vers 450 000.
4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu : $f'(t) = \dfrac{315\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}}{2\left(1+7\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}\right)^2}$.

   Pour tout t de $[0~;~+\infty[$, on a : $2\left(1+7\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}\right)^2 > 0$ et $\mathrm{e}^{-0{,}05t} > 0$; on en déduit que pour tout t de $[0~;~+\infty[$, on a : $f'(t) > 0$.

   Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.

   Cela signifie que le nombre de personnes équipées de l'implant croît avec le temps.
5. Pour déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes de ce pays équipées de cet implant médical dépassera 120 000, c'est-à-dire 120 milliers, on résout dans $[0~;~+\infty[$ l'inéquation $f(t) > 120$.

   $$\begin{aligned}
   f(t) > 120 &\iff \frac{450}{1+7\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}} > 120\\
   &\iff 450 > 120\left(1+7\,\mathrm{e}^{-0{,}05t}\right) \qquad \left[\text{car } 1+7\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} > 0\right]\\
   &\iff \frac{15}{4} > 1+7\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} \iff \frac{\frac{15}{4}-1}{7} > \mathrm{e}^{-0{,}05t}\\
   &\iff \frac{11}{28} > \mathrm{e}^{-0{,}05t} \iff \ln\left(\frac{11}{28}\right) > -0{,}05t\\
   &\iff -\frac{\ln\left(\frac{11}{28}\right)}{0{,}05} < t \qquad \left[\text{car } -0{,}05 < 0\right]
   \end{aligned}$$

   Or $-\dfrac{\ln\left(\frac{11}{28}\right)}{0{,}05} \approx 18{,}7$ donc c'est à partir de $t = 19$, donc de l'année 2032 que le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000.

Exercice 2 **10 points**

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et par une file d'entrée qui permet l'approvisionnement en bouteilles vides.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

On considère qu'il y a un défaut d'approvisionnement lorsqu'au moins un des deux cas suivants est réalisé :

- la file d'entrée des bouteilles est vide ;

- le réservoir est vide.

On choisit au hasard un jour d'activité de l'entreprise dans l'année. On note :

- A l'évènement : « la file d'entrée des bouteilles est vide au moins une fois dans la journée » ;
- B l'évènement : « le réservoir est vide au moins une fois dans la journée ».

On admet que les évènements A et B sont indépendants.

Une étude statistique permet de dire que les probabilités des évènements A et B sont respectivement données par $P(A) = 0{,}03$ et $P(B) = 0{,}02$.

Chaque phrase du tableau de gauche est associée à une unique information correspondante dans le tableau de droite.

1	La probabilité de l'évènement : « La file d'entrée ne se vide pas dans la journée. »
2	L'évènement : « La file d'entrée est vide au moins une fois dans la journée mais pas le réservoir. »
3	La probabilité de l'évènement : « La file d'entrée et le réservoir ont été tous les deux vides au moins une fois au cours de la journée. »
4	La probabilité de l'évènement : « La machine a connu un défaut d'approvisionnement dans la journée. »

A	$\overline{A} \cap B$
B	0,05
C	$A \cap \overline{B}$
D	0,049 4
E	0,97
F	0,000 6

1. **E**

   L'événement « La file d'entrée ne se vide pas dans la journée. » est l'événement $\overline{A}$ dont la probabilité est $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$.

2. **C**

   L'événement « La file d'entrée est vide au moins une fois dans la journée mais pas le réservoir » correspond à « la file d'entrée des bouteilles est vide au moins une fois dans la journée » et le contraire de « le réservoir est vide au moins une fois dans la journée », soit $A \cap \overline{B}$.

3. **F**

   L'événement « La file d'entrée et le réservoir ont été tous les deux vides au moins une fois au cours de la journée. » est l'événement $A \cap B$. Comme les événements A et B sont indépendants, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}03 \times 0{,}02 = 0{,}000\,6$.

4. **D**

   L'événement « La machine a connu un défaut d'approvisionnement dans la journée. » est l'événement $A \cup B$ dont la probabilité est
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}000\,6 = 0{,}049\,4$.

Partie B - Pannes de la machine à embouteiller sur une durée de 200 jours

1. Lorsque la machine tombe en panne, elle est immobilisée pour le reste de la journée et réparée pour le lendemain. La probabilité qu'elle tombe en panne un jour quelconque est égale à 0,025.

On note X la variable aléatoire qui, à toute période de 200 jours consécutifs choisie au hasard, associe le nombre de jours où la machine est tombée en panne.

On considère que les jours où les pannes surviennent sont indépendants les uns des autres.

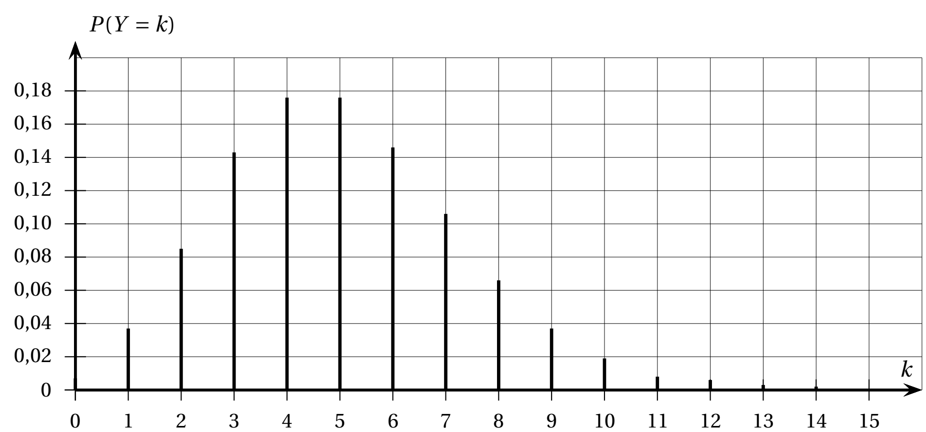
Il s'agit d'une répétition de 200 épreuves indépendantes donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,025$.

2. On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y une variable aléatoire qui suit cette loi de Poisson.

a. Sous certaines conditions, la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ peut être approchée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$; or $n = 200$ et $p = 0,25$ donc $\lambda = 200 \times 0,025 = 5$.

b. À la calculatrice on trouve : $P(Y \leqslant 10) \approx 0,986$.

c. On a représenté ci-dessous les valeurs de $P(Y = k)$ en fonction des premières valeurs de k :



Cette représentation graphique suggère que $P(Y = 15) = 0$.

On admet que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $P(Y = k) = \dfrac{5^k \mathrm{e}^{-5}}{1 \times 2 \times \ldots \times k}$.

À la calculatrice, on trouve $P(Y = 15) \approx 1,572 \times 10^{-4} \neq 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Un laboratoire analyse la qualité de l'embouteillement en sortie de machine.

La machine est correctement réglée quand une bouteille remplie contient un volume d'eau dont l'arrondi au centilitre est 75 cL.

On souhaite tester l'hypothèse « La machine est correctement réglée » à l'aide d'un test bilatéral au seuil de confiance de 95 %.

On note :

- m la quantité moyenne d'eau en centilitres dans une bouteille remplie par la machine ;
- s l' écart type correspondant.

On réalise une mesure du volume d'eau arrondi au centilitre pour un échantillon de 100 bouteilles remplies par la machine. Les résultats obtenus figurent dans le tableau ci-dessous :

Quantité d'eau contenue (cL)	73	74	75	76	77
Nombre de bouteilles	17	20	43	13	7

1. À l'aide de la calculatrice, on trouve la moyenne $\overline{x} = 74{,}73$ et l'écart type $\sigma \approx 1{,}10$ de cet échantillon.

2. On souhaite réaliser le test bilatéral suivant au seuil de confiance de 95 % :

$$H_0 : \text{« } m = 75 \text{ » et} \quad H_1 : \text{« } m \neq 75 \text{ »}.$$

On note $\overline{Z}$ la variable aléatoire qui à tout échantillon de 100 bouteilles remplies par la machine associe la moyenne du volume d'eau contenue dans les bouteilles, mesuré en centilitres. On suppose que la variable aléatoire $\overline{Z}$ suit la loi normale d'espérance m et d'écart type s.

Dans la suite, on remplace l'écart type s des volumes d'eau contenue après remplissage par la machine par son estimateur 0,11.

Sous l'hypothèse H_0, $\overline{Z}$ suit donc la loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11.

a. On veut déterminer un nombre réel h vérifiant $P(75 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 75 + h) \approx 0{,}95$ à 10^{-2} près.

On sait que pour une variable aléatoire X suivant la loi normale de paramètres m et σ, on a : $P(m - 2\sigma \leqslant X \leqslant m + 2\sigma) \approx 0{,}95$.

On pourra donc prendre $h = 2\sigma = 2 \times 0{,}11 = 0{,}22$.

b. La règle de décision du test est : « Si la moyenne de l'échantillon appartient à l'intervalle $I_{95} = \left[75 - h\,;\,75 + h\right]$, on accepte l'hypothèse H_0 ; sinon on rejette l'hypothèse H_0. »

c. $I_{95} = \left[75 - h\,;\,75 + h\right] = \left[75 - 0{,}22\,;\,75 + 0{,}22\right] = \left[74{,}78\,;\,75{,}22\right]$

D'après les résultats de l'échantillon donné, on a $m = 74{,}73$ et $74{,}73 \notin I$.

Donc on ne peut pas accepter l'hypothèse H_0 : « $m = 75$ ».