Corrigé du brevet de technicien supérieur – mai 2021
Groupement E –

Exercice 1 **10 points**

Un créateur conçoit un flacon contenu dans un écrin en forme de pyramide.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

On considère les points A(6; 0; 0), B(6; 6; 0) et C(0; 6; 0).

1. On considère la pyramide régulière SOABC d'arête de longueur 6 cm représentée sur la figure de l'annexe.

a. Le point S′au centre du carré OABC, est le point d'intersection de [OB] et de [AC]. Voir figure.

b. On admet que la droite (SS′) est orthogonale au plan (OAB).

Le triangle SS′B est rectangle en S′ donc, d'après le théorème de Pythagore, on a : $\text{SS}'^2 + \text{BS}'^2 = \text{BS}^2$.

OABC est un carré de côté 6 donc sa diagonale OB est égale à $6\sqrt{2}$; donc $\text{BS}' = 3\sqrt{2}$.

De plus BS = 6; donc :

$\text{SS}'^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 6^2$ donc $\text{SS}'^2 = 36 - 18 = 18$ et donc $\text{SS}' = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

c. Le point B a pour coordonnées (3; 3; 0).

Le point S′ est le milieu de [OB] donc

$x_{\text{S}'} = \dfrac{x_\text{O} + x_\text{B}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$; $y_{\text{S}'} = \dfrac{y_\text{O} + y_\text{B}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ et $z_{\text{S}'} = \dfrac{z_\text{O} + z_\text{B}}{2} = 0$

Le point S′ a donc pour coordonnées (3 ; 3 ; 0).

La droite (SS′) est orthogonale au plan (OAB) qui est le plan $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$; donc la droite est parallèle à l'axe $\left(\text{O}\,;\,\vec{k}\right)$. Ce qui entraîne que les points S et S′ ont même abscisse et même ordonnée.

La cote de S est égale à SS′ donc égale à $3\sqrt{2}$.

Le point S a donc pour coordonnées $\left(3\,;\,3\,;\,3\sqrt{2}\right)$.

2. M, N, P, Q sont définis par : $\overrightarrow{\text{SM}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{SO}}$; $\overrightarrow{\text{SN}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{SA}}$; $\overrightarrow{\text{SP}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{SB}}$; $\overrightarrow{\text{SQ}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{SC}}$.

a. On place les points M, N, P et Q sur la figure.

On admet que SMNPQ est une pyramide à base carrée de hauteur $h = \dfrac{1}{3}\text{SS}'$.

b. $\overrightarrow{\text{SM}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{SO}}$; $\overrightarrow{\text{SN}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{SA}}$ donc $\overrightarrow{\text{SN}} - \overrightarrow{\text{SM}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{SA}} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{SO}}$ donc $\overrightarrow{\text{MN}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{OA}}$

On en déduit que $\text{MN} = \dfrac{1}{3}\text{OA}$ donc MN = 2.

La longueur, en cm, du côté du carré MNPQ est 2.

c. Le volume de la pyramide SMNPQ est, en cm^3 :

$$\mathcal{V}_{\text{SMNPQ}} = \frac{1}{3}\,(\text{aire MNPQ}) \times (\text{hauteur}) = \frac{1}{3} \times 2^2 \times \frac{1}{3}\text{SS}' = \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

3. On considère les points U(2 ; 0 ; 0), V(0 ; 2 ; 0) ainsi que le point W tel que $\overrightarrow{\text{OW}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{OS}}$.

a.
- $\overrightarrow{\text{OW}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\text{OS}}$ donc $\left\{\begin{array}{rclclcl} x_{\text{W}} &=& \frac{1}{3}x_{\text{S}} &=& \frac{1}{3}\times 3 &=& 1\\ y_{\text{W}} &=& \frac{1}{3}y_{\text{S}} &=& \frac{1}{3}\times 3 &=& 1\\ z_{\text{W}} &=& \frac{1}{3}z_{\text{S}} &=& \frac{1}{3}\times 3\sqrt{2} &=& \sqrt{2}\end{array}\right.$

  Donc W a pour coordonnées $\left(1\ ;\ 1\ ;\ \sqrt{2}\right)$.
- $\overrightarrow{\text{WU}}$ a pour coordonnées $\left\{\begin{array}{rclcr} x_{\text{U}}-x_{\text{W}} &=& 2-1 &=& 1\\ y_{\text{U}}-y_{\text{W}} &=& 0-1 &=& -1\\ z_{\text{U}}-z_{\text{W}} &=& 0-\sqrt{2} &=& -\sqrt{2}\end{array}\right.$
- $\overrightarrow{\text{WV}}$ a pour coordonnées $\left\{\begin{array}{rclcr} x_{\text{V}}-x_{\text{W}} &=& 0-1 &=& -1\\ y_{\text{V}}-y_{\text{W}} &=& 2-1 &=& 1\\ z_{\text{V}}-z_{\text{W}} &=& 0-\sqrt{2} &=& -\sqrt{2}\end{array}\right.$

b.
- $\text{WU}^2 = \left\|\overrightarrow{\text{WU}}\right\|^2 = 1^2 + (-1)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 4$ donc WU = 2
- $\text{WV}^2 = \left\|\overrightarrow{\text{WV}}\right\|^2 = (-1)^2 + 1^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 4$ donc WV = 2
- $\text{UV}^2 = (x_{\text{V}} - x_{\text{U}})^2 + \left(y_{\text{V}} - y_{\text{U}}\right)^2 + (z_{\text{V}} - z_{\text{U}})^2 = (0-2)^2 + (2-0)^2 + (0-0)^2 = 8$

On en déduit que WU = WV donc que le triangle UVW est isocèle.

Or $8 = 4+4$ donc $\text{UV}^2 = \text{WU}^2 + \text{WV}^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle UVW est rectangle en W.

On peut donc dire que le triangle UVW est isocèle rectangle en W.

c. Le point R est le milieu du segment [UV] donc :

$$\left\{\begin{array}{rclclcl} x_{\text{R}} &=& \dfrac{x_{\text{U}}+x_{\text{V}}}{2} &=& \dfrac{2+0}{2} &=& 1\\ y_{\text{R}} &=& \dfrac{y_{\text{U}}+y_{\text{V}}}{2} &=& \dfrac{0+2}{2} &=& 1\\ z_{\text{R}} &=& \dfrac{z_{\text{U}}+z_{\text{V}}}{2} &=& \dfrac{0+0}{2} &=& 0\end{array}\right.$$

d. On admet que (OR) est une hauteur du tétraèdre OUVW.

- Le triangle UVW est rectangle en W donc son aire vaut en cm^2 :

  $\mathcal{A}_{\text{UVW}} = \dfrac{\text{WU}\times\text{WV}}{2} = \dfrac{2\times 2}{2} = 2.$
- Le volume du tétraèdre OUVW vaut $\mathcal{V}_{\text{OUVW}} = \dfrac{\mathcal{A}_{\text{UVW}}\times \text{OR}}{3}$.

  $\text{OR}^2 = (x_{\text{R}} - x_{\text{O}})^2 + \left(y_{\text{R}} - y_{\text{O}}\right)^2 + (z_{\text{R}} - z_{\text{O}})^2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2$ donc $\text{OR} = \sqrt{2}$

Donc $\mathcal{V}_{\text{OUVW}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ cm^3.

4. Par tronçonnage en chaque sommet O, A, B, C, on enlève à la pyramide initiale un tétraèdre analogue au tétraèdre OUVW. Par tronçonnage en S, on enlève la pyramide SMNPQ. On obtient ainsi un solide inscrit dans la pyramide initiale. Ce solide représente un flacon.

a. Sur la même figure, on dessine ce flacon en traits pleins en couleur.

b. On calcule la valeur exacte du volume du flacon.

- La pyramide SOABC a pour volume :
  $\mathcal{V}_{\text{SOABC}} = \dfrac{1}{3} \times \mathcal{A}_{\text{OABC}} \times \text{SS}' = \dfrac{1}{3} \times 6^2 \times 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$.
- La pyramide SMNPQ a pour volume : $\mathcal{V}_{\text{SMNPQ}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.
- Le tétraèdre OUVW a pour volume : $\mathcal{V}_{\text{OUVW}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.
  Il faut retirer 4 fois ce volume du volume total de la pyramide SOABC.

Le volume, en cm^3, du flacon est donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \mathcal{V}_{\text{SOABC}} - \mathcal{V}_{\text{SMNPQ}} - 4 \times \mathcal{V}_{\text{OUVW}}\\ &= 36\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - 4 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 36\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{3} = 36\sqrt{2} - \frac{12\sqrt{2}}{3} = 36\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\\ &= 32\sqrt{2}.\end{aligned}$$

c. On détermine la nature géométrique de chacune des faces de ce flacon.

- Le dessous du flacon est un carré de côté 6 cm auquel on a retiré les 4 coins; c'est donc un octogone.
- Les 4 faces latérales sont des triangles équilatéraux de côtés 6 cm auxquels on a retiré des triangles à chaque sommet; ce sont donc des hexagones.
- Les 4 faces latérales sont reliées au fond du flacon par 4 triangles isocèles rectangles.
- Enfin le dessus du flacon est un carré de côté 2 cm.

Voir le patron du flacon (non demandé dans ce devoir) en fin de document.

EXERCICE 2 — 10 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$, on considère les points :

A(6 ; 2) ; B(3 ; 5) ; C(0 ; 4) et D(9 ; −1).

1. On note Γ la courbe de Bézier associée aux points de contrôles A, B, C et D.

a. D'après la définition des courbes de Bézier à quatre points de contrôle, la courbe Γ passe par les points A et D, et ne passe ni par B ni par C.

b. D'après la définition des courbes de Bézier à quatre points de contrôle :

- la droite (AB) est tangente en A à la courbe Γ;
- la droite (DC) est tangente en D à la courbe Γ.

2. La courbe Γ est l'ensemble des points $M(t)$ tels que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,1]$:

$$\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)^3\overrightarrow{OA} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{OB} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{OC} + t^3\overrightarrow{OD}.$$

a. $\overrightarrow{OM(t)} = (1-t)^3\overrightarrow{OA} + 3t(1-t)^2\overrightarrow{OB} + 3t^2(1-t)\overrightarrow{OC} + t^3\overrightarrow{OD}$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x_{M(t)} = (1-t)^3x_A + 3t(1-t)^2x_B + 3t^2(1-t)x_C + t^3x_D \\ y_{M(t)} = (1-t)^3y_A + 3t(1-t)^2y_B + 3t^2(1-t)y_C + t^3y_D \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x_{M(t)} = (1-t)^3\times 6 + 3t(1-t)^2\times 3 + 3t^2(1-t)\times 0 + t^3\times 9 \\ y_{M(t)} = (1-t)^3\times 2 + 3t(1-t)^2\times 5 + 3t^2(1-t)\times 4 + t^3\times(-1) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x_{M(t)} = 6\left(1-3t+3t^2-t^3\right) + 9t\left(1-2t+t^2\right) + 0 + 9t^3 \\ y_{M(t)} = 2\left(1-3t+3t^2-t^3\right) + 15t\left(1-2t+t^2\right) + 12\left(t^2-t^3\right) - t^3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x_{M(t)} = 6-18t+18t^2-6t^3+9t-18t^2+9t^3+9t^3 \\ y_{M(t)} = 2-6t+6t^2-2t^3+15t-30t^2+15t^3+12t^2-12t^3-t^3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x_{M(t)} = 6-9t+12t^3 \\ y_{M(t)} = 2+9t-12t^2 \end{array}\right.$$

donc les coordonnées x et y des points $M(t)$ de cette courbe ont pour expression :

$$x = f(t) = 12t^3 - 9t + 6 \text{ et } y = g(t) = -12t^2 + 9t + 2.$$

b. On étudie les variations des fonctions f et g définies pour t dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ par : $f(t) = 12t^3 - 9t + 6$ et $g(t) = -12t^2 + 9t + 2$.

- $f'(t) = 12\times 3t^2 - 9 = 36t^2 - 9 = 9\left(4t^2-1\right) = 9(2t-1)(2t+1)$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$2t-1$		$-$	0	$+$	
$2t+1$		$+$		$+$	
$f'(t) = 9(2t-1)(2t+1)$		$-$	0	$+$	

- $g'(t) = -12\times 2t + 9 = -24t + 9 = -3(8t-3)$

t	0		$\frac{3}{8}$		1
$8t-3$		$-$	0	$+$	
$g'(t) = -3(8t-3)$		$+$	0	$-$	

On rassemble les résultats dans un tableau unique.

$f(0) = 6$; $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$; $f(1) = 9$ et $g(0) = 2$; $g\left(\frac{3}{8}\right) = \dfrac{59}{16}$; $g(1) = -1$

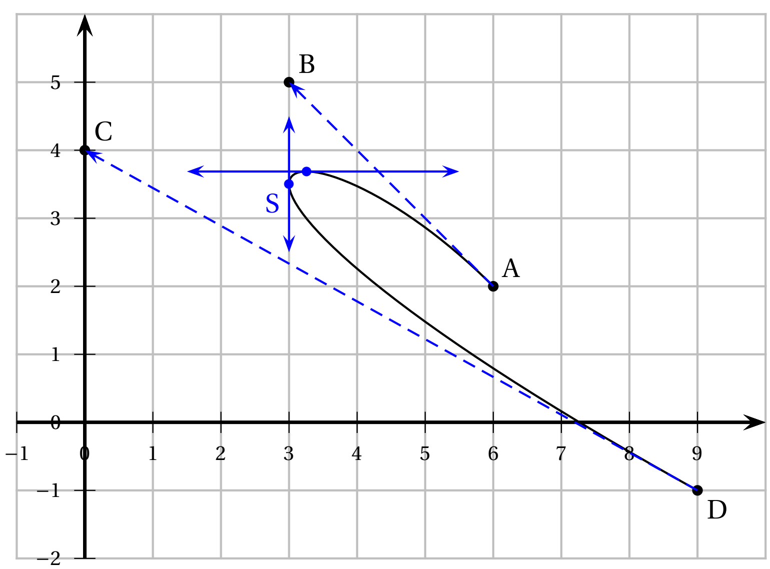
t	0		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(t)$	6	$\searrow$			3	$\nearrow$	9
$g'(t)$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$g(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{59}{16}$	$\searrow$			-1

c. La courbe Γ admet au point S, obtenu pour $t = \dfrac{1}{2}$, une tangente de vecteur directeur :

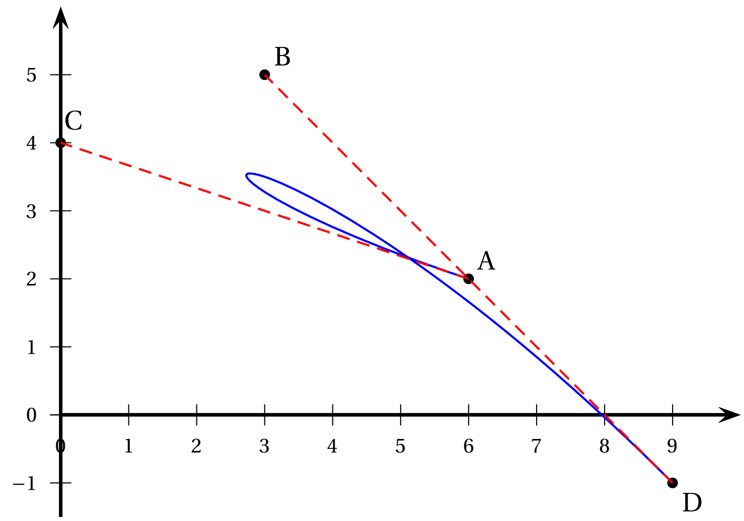
$3\vec{\imath} + 3{,}5\vec{\jmath}$	$\dfrac{1}{2}\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$	$\vec{\imath}$	$\boxed{\vec{\jmath}}$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \neq 0$ donc la courbe admet au point S une tangente verticale donc de vecteur directeur $\vec{\jmath}$.

3. On trace les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$, les tangentes au point S et au point de paramètre $t = \dfrac{3}{8}$, puis la courbe Γ.

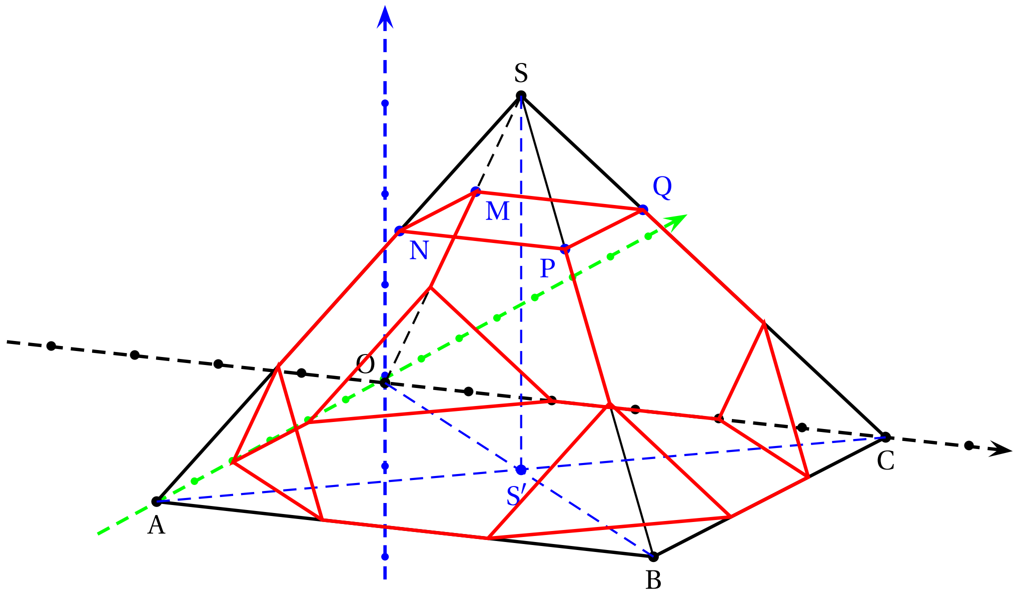


4. Un étudiant a voulu tracer la courbe Γ à l'aide d'un logiciel, en y entrant les points de contrôle. **Ce tracé, donné ci-dessous, est faux**.

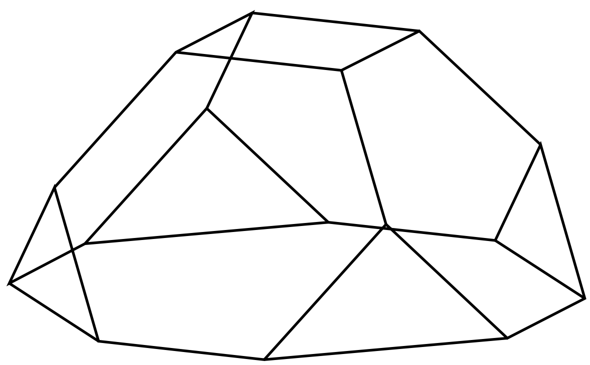


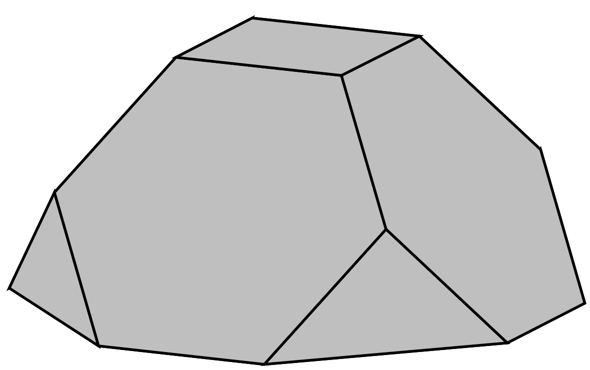
D'après le graphique, les droites (AC) et (BD) (tracées en tirets rouges sur la figure) semblent tangentes à la courbe tracée, donc la courbe tracée est probablement la courbe de Bézier correspondant aux points de contrôle A, C, B, D; l'erreur vient de la permutation des points B et C.

Exercice 1



Exercice 1 - Dessins du flacon (non demandés)





Exercice 1 - Patron du flacon (non demandé)