# Corrigé du BTS Métropole–Antilles–Guyane
# 13 mai 2015 - groupement B

**Exercice 1** **10 points**

**A. Résolution d'une équation différentielle**

1. **a.** $r^2+5r+4=0$ est une équation du second degré dont les solutions sont : $r_1=-1$ et $r_2=-4$

   **b.** D'après le rappel des formules, la solution générale, sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle :

   $$y''+5y'+4y=0 \text{ est } y(x)=k_1\mathrm{e}^{-x}+k_2\mathrm{e}^{-4x}$$

   où $k_1$ et $k_2$ sont deux constantes réelles.

2. Le résultat du logiciel de calcul formel permet de dire que $f$, la solution générale sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle

   $$y''+5y'+4y=10$$

   a pour expression :

   $$f(x)=k_1\mathrm{e}^{-x}+k_2\mathrm{e}^{-4x}+\frac{5}{2}$$

   où $k_1$ et $k_2$ sont deux constantes réelles.
   On a donc $f'(x)=-k_1\mathrm{e}^{-x}+(-4)k_2\mathrm{e}^{-4x}=-k_1\mathrm{e}^{-x}-4k_2\mathrm{e}^{-4x}$.
   Déterminons la solution particulière telle que :
   $\left\{\begin{array}{rcl} f(0) & = & 5\\ f'(0) & = & -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} k_1+k_2+\dfrac{5}{2} & = & 5\\ -k_1-4k_2 & = & -1\end{array}\right.$ , d'où par somme
   $-3k_2=\dfrac{3}{2} \iff k_2=-\dfrac{1}{2}$.
   Par substitution dans la première équation :
   $k_1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}=5 \iff k_1=3$.
   La solution particulière est définie par : $f(x)=3\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-4x}+\dfrac{5}{2}$.

**B. Étude d'une fonction**

1. D'après le graphique, la fonction $f : t\longmapsto 3\mathrm{e}^{-t}-0,5\mathrm{e}^{-4t}+2,5$ semble décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
2. Pour tout $t\in[0\ ;\ +\infty[$ $f'(t)=-\mathrm{e}^{-4t}(3\mathrm{e}^{3t}-2)$, comme $3\mathrm{e}^{3t}-2>0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$, on sait également que pour tout $t\in[0\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{-4t}>0$, donc $f'(t)<0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$, par conséquent $f$ est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
3. Le développement limité de la fonction $f$, à l'ordre 2, au voisinage de 0 est : $f(t)=5-t-\dfrac{5}{2}t^2+t^2\epsilon(t)$, avec $\displaystyle\lim_{t\to 0}\epsilon(t)=0$.
4. $y=-t+5$ est l'équation de la tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

5. Pour l'étude de la positon relative de $T$ par rapport à $\mathscr{C}$, il suffit d'étudier le signe de $f(t) - (-t+5)$ au voisinage de 0.
D'après 2. a. $f(t)-(-t+5) = -\dfrac{5}{2}t^2+t^2\epsilon(t) = -t^2\left(\dfrac{5}{2}+\epsilon(t)\right)$, or $\dfrac{5}{2}+\epsilon(t)$ est positif car au voisinage de 0, $\epsilon(t)$ est négligeable devant $\dfrac{5}{2}$. Donc signe
$(f(t)-(-t+5)) = \text{signe}\left(-t^2\right)$, d'où $f(t)-(-t+5) \leqslant 0$, par conséquent $T$ est au dessus de $\mathscr{C}$.
6. $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{e}^{-t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \text{e}^{-4t} = 0$
par somme $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 2,5$.
7. Cette limite indique que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote d'équation $y = 2,5$ au voisinage de $+\infty$

**C. Application au transfert de la pièce sur la tapis roulant**

1. On peut observer que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[,\ \ 2,5 < f(t) \leqslant 5$.
Le tapis est à 250 cm = 2,5 m du sol, la pièce peut être transférée dès qu'elle se situe à 251 cm du sol soit 2,51 m. On cherche $t_0$ tel que $2,5 \leqslant f(t) \leqslant 2,51$, pour cela on trace la droite d'équation $y = 2,51$, cette droite coupe la courbe en un seul point d'abscisse $t_0$. Graphiquement on trouve $t_0 \simeq 5,7$
2. L'exécution de 3 étapes de cet algorithme donne les résultats suivants :

| | étape 1 | étape 2 | étape 3 |
|---|---|---|---|
| $a$ | 5 | 5,5 | 5,5 |
| $b$ | 6 | 6 | 5,75 |
| $b-a$ | 1 | 0.5 | 0,25 |
| $m$ | 5,5 | 5,75 | 5,625 |

3. L'amplitude de l'encadrement de $t_0$ fourni à l'issue des trois étapes vaut 0,25. Cette amplitude est supérieure à 0,1 ( condition d'arrêt de la boucle)

La traduction de cet algorithme avec **R-Project** donne :

```
f<-function(x){3*exp(-x)-0.5*exp(- 4*x) + 2.5}
a<-5; b<-6
while((b - a) > 0.1){m<-(a+b)/2; ifelse(f(m) > 2.51,a <- m,b <- m)}
print(paste('a=',a,'et b=',b))
```

```
[1] « a= 5.6875 et b= 5.75 »
```

**Exercice 2** **10 points**

**A. Loi exponentielle**

1. La variable aléatoire $T$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$, on écrit : $T \sim> \mathscr{E}(\lambda = 0,005)$, donc
$P(T \leqslant 100) = 1 - \text{e}^{-0,005\times 100} \simeq 0,393$.
2. $E(T) = \dfrac{1}{0,005} = 200$. Sur une longue période, la durée de fonctionnement moyenne entre deux calibrages est égale à 200 heures.

**B. Loi binomiale et loi normale**

1. Chaque prélèvement d'un rivet est une épreuve de Bernoulli, avec les deux évènements contraires : **succès** qui correspond à un rivet prélevé **non conforme** et échec qui correspond à un rivet conforme, d'après l'énoncé **P(succès)=0,01**. Cette **même épreuve** est **répétée 500 fois**, de plus les épreuves sont **indépendantes** car le prélèvement du lot de 500 rivets est assimilé à un tirage avec remise. La variable aléatoire $X$ qui est égale au nombre de succès, à l'issue de cette expérience aléatoire, est la somme de 500 variables de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = 0,01$. D'où $X$ suit la **loi binomiale de paramètres n =500 et p=0,01**. On écrit :$X \sim> \mathscr{B}(500\ ;\ 0,01)$
2. **a.** $P(X = 0) = 0,007$. Il y a 7 chances sur 1 000 d'avoir un rivet non conforme sur un lot de 500 rivets prélevés au hasard dans le stock.

   **b.** On cherche $P(X \leqslant 7) = 0,868$
3. **a.** Si on approche $X$ par la variable aléatoire $Y$ qui suit une loi normale, celle-ci est caractérisée par ses paramètres $m = E(X) = np = 500 \times 0,01 = 5$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5 \times 0,99} \simeq 2,22$

   **b.** $P(Y \leqslant 7,5) \simeq 0,870$, on sait que $P(X \leqslant 7)$ est approchée par $P(Y \leqslant 7,5)$ (correction de continuité). L'approximation est valable car l'écart est voisin de 0,002

**C. Test d'hypothèse**

1. $\overline{Z} \sim> \mathcal{N}(45\ ;\ 0,015)$, d'après les résultats fournis $h = 0,0294$
2. Règle de décision : On prélève un échantillon au hasard de taille $n = 100$ rivets, on calcule sa moyenne $\overline{z}$, si $\overline{z} \in [44,971\ ;\ 45,029]$, on accepte $H_0$ avec un risque de 5%, sinon on rejette $H_0$ avec le même risque.
3. Ici $\overline{z} = 45,03 \notin [44,971\ ;\ 45,029]$, on peut rejeter $H_0$ et conclure, avec un risque de 5%, que la livraison n'est pas conforme pour le diamètre.