Corrigé du brevet de technicien supérieur groupement B
13 mai 2019 - Métropole–Antilles–Guyane–Polynésie

Exercice 1 **10 points**

Partie A

1. **a.** On sait que les solutions de (E_0) sont les fonctions y_0 définies par :
$y_0(t) = K\mathrm{e}^{-0,05t}$ où K est une constante réelle.

   b. g définie par $g(t) = 40$ est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et $g'(t) = 0$. Donc
$g'(t) + 0,05g(t) = 0 + 0,05 \times 40 = 0 + 2 = 2$, ce qui montre que g est une solution de (E).

   c. Les solutions de (E) sont donc les fonctions y définies par :
$y(t) = K\mathrm{e}^{-0,05t} + g(t) = K\mathrm{e}^{-0,05t} + 40$ où K est une constante réelle.

2. f est une solution de (E), donc
$f(t) = K\mathrm{e}^{-0,05t}+40$; or $f(0) = 18 \iff K\mathrm{e}^{-0,05\times 0}40 = 18 \iff K+40 = 18 \iff K = 18-40 = -22$.
On en déduit l'expression de f :
$f(t) = -22\mathrm{e}^{-0,05t} + 40 = 40 - 22\mathrm{e}^{-0,05t}$ sur $[0~;~+\infty[$.

Partie B

1. **a.** On admet que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,05t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} -22 \times \mathrm{e}^{-0,05t} = 0$ et enfin $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 40$.

   b. Le résultat précédent montre que, géométriquement la droite d'équation $y = 40$ est une asymptote horizontale à la courbe C.

2. **a.** Le logiciel donne $f'(t) = \dfrac{11}{10}\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}t}$.

   Or quel que soit le réel t, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}t} > 0$ et par suite $f'(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$; f est donc strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.

   b. On en déduit le tableau de variations : avec $f(0) = 18$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 40$:

t	0	$+\infty$
$f(t)$	18	40

3. Le logiciel de calcul formel donne, limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 :
$f(t) = 18 + \dfrac{11}{10}t - \dfrac{11}{400}t^2$.

   a. L'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse est le développement limité de f à l'ordre 1, soit $y = 18 + \dfrac{11}{10}t$. (réponse 2)

   b. On a $f'(0) = \dfrac{11}{10}\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}\times 0} = \dfrac{11}{10} \times 1 = \dfrac{11}{10} = 1,1$ °/s. (réponse 2)

Partie C

1.

Valeur de t	Valeur de $f(t)$ arrondie à 10^{-2}	Condition $f(t) \leqslant 21$
0	18	vraie
1	19,07	vraie
2	20,09	vraie
3	21,064	faux

2. $t = 3$.
À partir de 3 secondes, la température dépasse 21°C

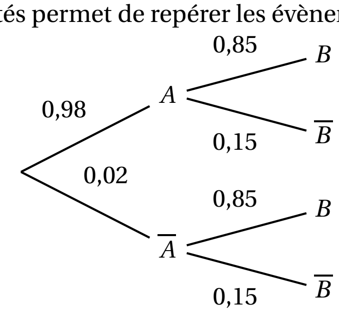
Exercice 2

Partie A

1. A et B sont indépendants donc $p(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
L'évènement E_1 signifie que le pneumatique a validé les deux tests, donc $P(E_1) = P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,98 \times 0,85 = 0,833$.

2. $P(E_2) = P\left(\overline{E_1}\right) = 1 - P(E_1) = 1 - 0,833 = 0,167$.

3. Un arbre pondéré de probabilités permet de repérer les évènements :



Méthode 1 : $P(E_3) = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P\left(\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}\right) \times P(B)$.
$P(E_3) = (1 - 0,98) \times 0,85 + 0,98 \times (1 - 0,85) = 0,164$.
Méthode 2 : On a $P(E_3) = 1 - P(A \cap B) - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0,833 - 0,02 \times 0,05 = 0,0167 - 0,003 = 0,164$.

Partie B

1. D'après l'énoncé, $E(T) = 10 = \dfrac{1}{\lambda}$. D'où $\lambda = \dfrac{1}{10} = 0,1$.

2. **a.** D'après la formule donnée : $P(T \leqslant 20) = 1 - \mathrm{e}^{-0,1 \times 20} \approx 1 - 0,1353 \approx 0,8646$, soit au millième $0,865$.

b. On doit calculer $P(T > 15) = 1 - P(T \leqslant 15) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,1 \times 15}\right) = \mathrm{e}^{-0,1 \times 15} \approx 0,223$.

3. Pour déterminer cette durée médiane, on peut résoudre l'équation : $1 - \mathrm{e}^{-0,1t} = 0,5$, d'où par croissance de la fonction logarithme, on obtient
$-0,1t = \ln(0,5)$. D'où $t = \dfrac{\ln(0,5)}{-0,1} \approx 6,931$ (h) soit 6 h et $0,931 \times 60 = 55,86$ (min) soit à peu près 6 h 56 min.

Partie C

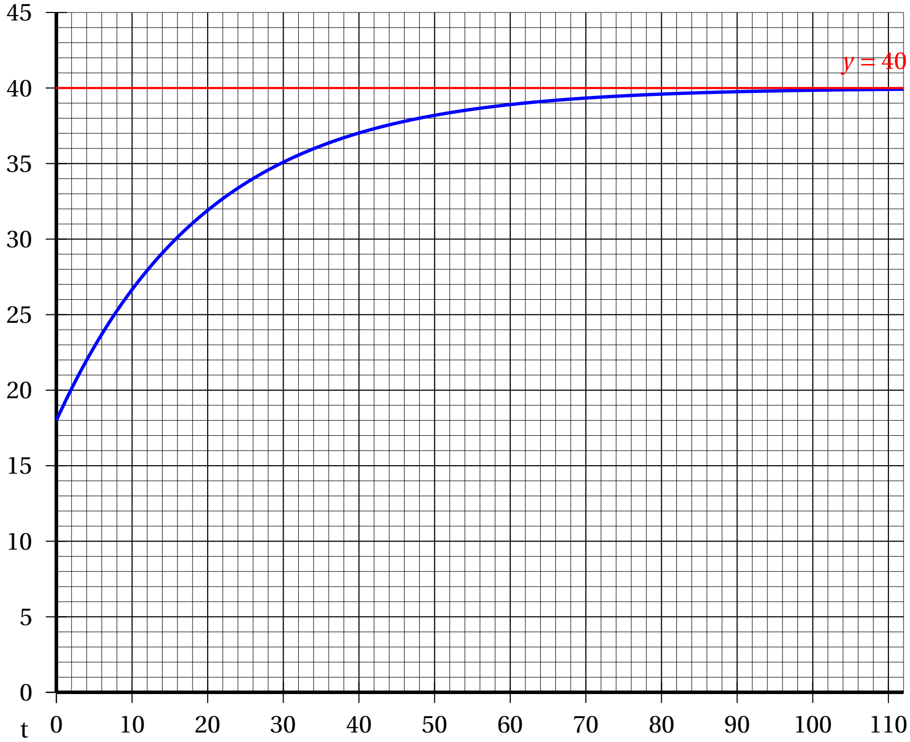
1. $f = \dfrac{44}{50} = \dfrac{88}{100} = 0,88$.

2. **a.** D'après la formule donnée l'intervalle de confiance est [0,790 ; 0,970].

b. Par définition p appartient à l'intervalle de confiance.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

EXERCICE 1 QUESTION B. 1. b.



Corrigé de Biram Ndiaye