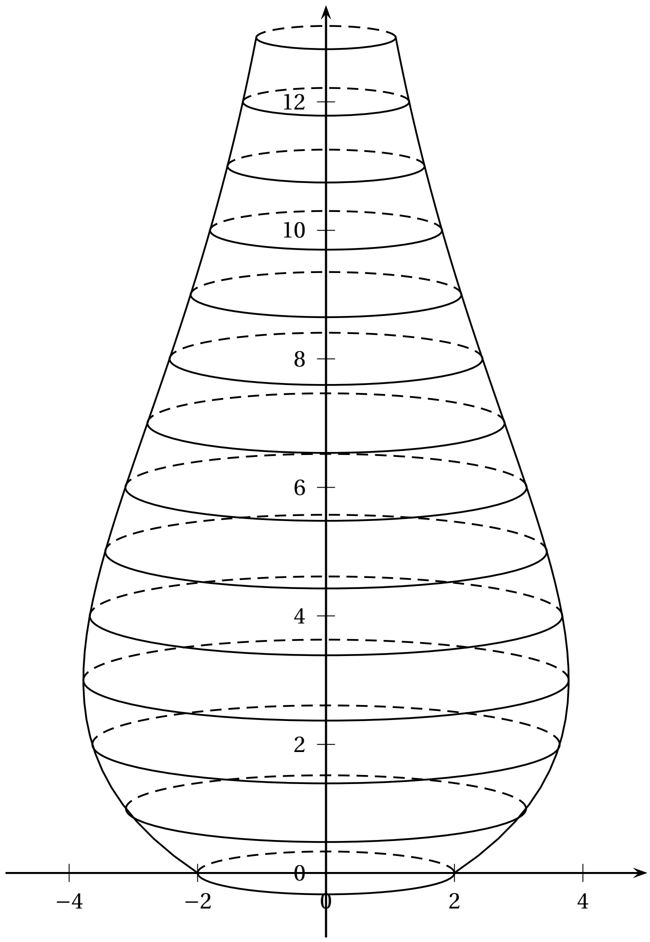
Corrigé du Brevet de Technicien Supérieur

Métropole – 16 mai 2022 – Groupement C1

Exercice 1 **9 points**

Une entreprise réalise par tournage des pieds de lit en bois. La hauteur du pied est de 13 cm et sa base a pour diamètre 4 cm.



Partie A : Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $16y'' + 8y' + y = 0$.

1. On résout l'équation $16r^2 + 8r + 1 = 0$.
   $16r^2 + 8r + 1 = 0 \iff (4r+1)^2 = 0 \iff r = -0{,}25$
   Cette équation admet une solution double $r = -0{,}25$.
2. L'équation différentielle (E) a pour équation caractéristique $16r^2+8r+1 = 0$; on en déduit que la forme générale des solutions de (E) est $x \longmapsto (\lambda x + \mu)\,\mathrm{e}^{-0{,}25x}$, où λ et μ sont deux réels quelconques.
3. On détermine la fonction g, solution de (E) qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = 1{,}5$.

- $g(0) = 2 \iff (0+\mu)\,\mathrm{e}^0 = 2 \iff \mu = 2$ donc $g(x) = (\lambda x + 2)\,\mathrm{e}^{-0,25x}$
- $g'(x) = \lambda \times \mathrm{e}^{-0,25x} + (\lambda x + 2) \times (-0,25)\,\mathrm{e}^{-0,25x} = (\lambda - 0,25\lambda x - 0,5)\,\mathrm{e}^{-0,25x}$
- $g'(0) = 1,5 \iff (\lambda - 0 - 0,5)\,\mathrm{e}^0 = 1,5 \iff \lambda - 0,5 = 1,5 \iff \lambda = 2$

Donc la fonction g cherchée est définie par $g(x) = (2x+2)\,\mathrm{e}^{-0,25x}$.

Partie B : Étude de fonction

Pour modéliser ce pied de lit, on effectue la rotation autour de l'axe des abscisse sur l'intervalle $[0\,;\,13]$ de la courbe représentative d'une fonction f définie par

$$f(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-0,25x}$$

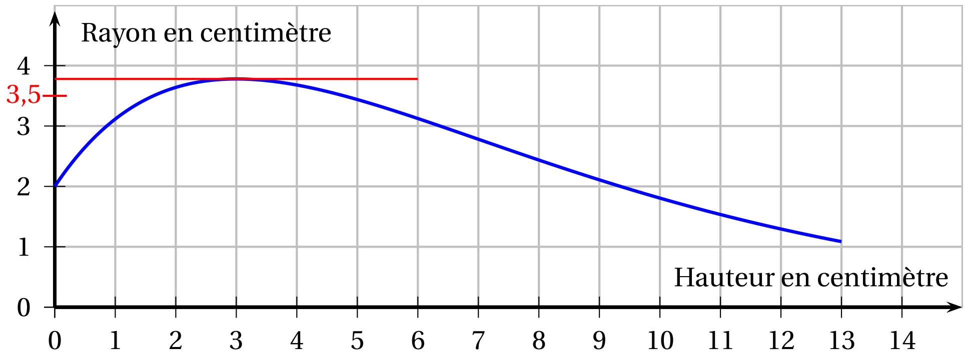
où a et b sont des nombres réels.

L'abscisse x représente la hauteur à partir du sol en centimètre du pied de lit et l'image $f(x)$ le rayon en centimètre du pied de lit à la hauteur x.

Pour assurer la stabilité du lit, on a les contraintes suivantes :

- La courbe, notée C_f, passe par le point A $(0\,;\,2)$.
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe en A doit être égal à 1.5

1. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point A $(0\,;\,2)$ ce qui veut dire que $f(0) = 2$.
   Autrement dit : $b\,\mathrm{e}^0 = 2$, soit $b = 2$. Donc $f(x) = (ax+2)\,\mathrm{e}^{-0,25x}$.
2. D'après la partie A, on peut dire que $f'(x) = (-0,25ax + a - 0,5)\,\mathrm{e}^{-0,25x}$.
3. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse A est égal à 1.5 signifie que $f'(0) = 1,5$.
   D'après la partie A, on peut déduire que $a = 2$ et donc que $f(x) = (2x+2)\,\mathrm{e}^{-0,25x}$.
4. Pour sa production de pieds de lit, l'entreprise utilise comme modèle la courbe ci-dessous, représentative de la fonction f définie par $f(x) = (2x+2)\,\mathrm{e}^{-0,25x}$ sur l'intervalle $[0\,;\,13]$.



Le rayon de la partie bombée correspond à la valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,13]$.

- D'après le graphique, le maximum de la fonction f semble supérieur à 3,5 cm, donc il faut un morceau de bois de hauteur supérieure au double du maximum donc supérieure à 7 cm ; le morceau de bois ne semble donc pas convenir.
- $f'(x) = (-0,25ax + a - 0,5)\,\mathrm{e}^{-0,25x} = (-0,25 \times 2x + 2 - 0,5)\,\mathrm{e}^{-0,25x} = (-0,5x + 1,5)\,\mathrm{e}^{-0,25x}$
  Pour tout x, on sait que $\mathrm{e}^{-0,25x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-0,5x + 1,5$.

x	0		3		13
$-0{,}5x+1{,}5$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(3)$	$\searrow$	

Le maximum est donc $f(3) \approx 3{,}79$ donc son double est bien supérieur à 7.
La pièce ne convient pas.

Partie C : Calcul intégral

Pour modéliser un pied de lit, on considère la fonction définie par $f(x) = (2x+2)\,\mathrm{e}^{-0{,}25x}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 13]$.

À l'aide de la calculatrice, une valeur approchée du volume du pied de lit, arrondi au dixième de cm^3 est 316,9.

Exercice 2 — 11 points

Partie A : probabilités conditionnelles

Une entreprise réalise des pièces en bois avec deux machines, notées A et B, qui fabriquent respectivement 60 % et 40 % de toute la production. On sait que 3 % des pièces produites par la machine A sont défectueuses, alors que seulement 2 % des pièces produites par la machine B sont défectueuses. On choisit au hasard une pièce dans la production.

On définit les évènements suivants :

- A : « la pièce a été fabriquée par la machine A »,
- B : « la pièce a été fabriquée par la machine B »,
- D : « la pièce est défectueuse ».

1. $P_A(D)$ est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant qu'elle a été produite par la machine A; comme on suppose que 3 % des pièces produites par la machine A sont défectueuses, on a : $P_A(D) = 0{,}03$.

   $P_B(D)$ est la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant qu'elle a été produite par la machine B; comme on suppose que 2 % des pièces produites par la machine B sont défectueuses, on a : $P_B(D) = 0{,}02$.
2. La probabilité que la pièce soit défectueuse et ait été produite par la machine A est :

   $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}6 \times 0{,}03 = 0{,}018$.
3. La probabilité que la pièce soit défectueuse est, d'après la formule des probabilités totales :

   $$P(D) = P(A\cap D) + P(B \cap D) = P(A \cap D) + P(B) \times P_B(D)$$
   $$= 0{,}018 + 0{,}4 \times 0{,}02 = 0{,}018 + 0{,}008 = 0{,}026.$$

Partie B : lois de probabilités

Un magasin commercialise ces pièces de bois fabriquées par l'entreprise. On admet que la probabilité qu'une pièce, prise au hasard dans la production, présente un défaut de fabrication est de 0,026.

Le magasin commande un lot de 400 pièces. La production de l'entreprise est suffisamment importante pour considérer ce lot comme un tirage successif avec remise de 400 pièces.

1. Une pièce donnée a deux possibilités : elle est défectueuse, avec la probabilité $p = 0{,}026$, ou elle ne l'est pas, avec la probabilité $1 - p = 0{,}974$.

   Un considère un lot de 400 pièces prises dans une production suffisamment importante pour considérer ce lot comme un tirage successif avec remise de 400 pièces.

   La variable aléatoire X qui, à tout lot de 400 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses, suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = 0{,}026$.
2. La probabilité qu'au plus 6 pièces présentent un défaut de fabrication est $P(X \leqslant 6) \approx 0{,}104$.
3. La probabilité d'avoir, dans un lot, au moins 7 pièces présentant un défaut de fabrication est :

   $P(X \geqslant 7) = 1 - P(X < 7) = 1 - P(X \leqslant 6) \approx 1 - 0{,}104$ soit 0,896 au millième.
4. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ ; on appelle Y la variable qui suit cette loi de Poisson.

   La loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ peut être approchée par la loi de Poisson $\mathscr{P}(n \times p)$.
   Donc ici : $\lambda = n \times p = 400 \times 0{,}026 = 10{,}4$.
5. Dans cette question, on veut comparer $P(Y \geqslant 7)$ à $P(X \geqslant 7)$.

   D'après la calculatrice, $P(Y \geqslant 7) \approx 0{,}893$.

   Or $P(X \geqslant 7) \approx 0{,}896$; cela fait une sous-évaluation de 3 millièmes soit de 0,3 % si on remplace la loi X par son approximation Y.

Partie C : test d'hypothèse

La scierie qui fournit l'entreprise en morceaux de bois affirme que 85 % de ceux-ci, pris au hasard dans la production, sont conformes en largeur et en longueur. L'entreprise doute de cette affirmation et commande un test d'hypothèse bilatéral au risque de 5 % pour vérifier si la proportion p de morceaux de bois conformes est bien de 0,85.

On note (H_0) : « $p = 0{,}85$ ».

On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 morceaux de bois prélevés au hasard dans la production de la scierie, associe la fréquence de morceaux conformes en largeur et en hauteur. On admet que, sous H_0, la variable aléatoire F suit la loi normale de moyenne 0,85 et d'écart-type $\sqrt{\frac{0{,}85(1-0{,}85)}{100}}$.

1. L'hypothèse alternative H_1 est : $p \neq 0{,}85$.
2. Pour un risque de 5 %, la zone d'acceptation du test est l'intervalle de fluctuation $\left[\mu - 1{,}96s\,;\, \mu + 1{,}96s\right]$, où μ est la moyenne et s l'écart-type.

$$\begin{aligned}\left[\mu - 1{,}96s\,;\, \mu + 1{,}96s\right] &= \left[0{,}85 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}85 \times 0{,}15}{100}}\,;\, 0{,}85 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}85 \times 0{,}15}{100}}\right]\\ &\approx \left[0{,}78\,;\, 0{,}92\right]\end{aligned}$$

3. On peut énoncer la règle de décision :

- si la proportion de pièces conformes dans l'échantillon n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation $[0,78\,;\,0,92]$, alors on rejette l'hypothèse nulle, au risque de 5 % ;
- sinon, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle.

On suppose que sur un échantillon de 100 morceaux de bois, on a compté 80 morceaux conformes.

La proportion de pièces conformes est donc de 0,8 ; or $0,8 \in [0,78\,;\,0,92]$ donc on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle au risque de 5 %, et l'entreprise n'a donc pas de raison de douter de l'affirmation de la scierie.