∽ Corrigé du Brevet de technicien supérieur Métropole ∾

15 mai 2023 - Groupement C1

Durée : 2 heures

Exercice 1 **11 points**

L'apparition des fibres de carbone a révolutionné le monde des équipements sportifs. Leur diversité a permis de multiples applications.

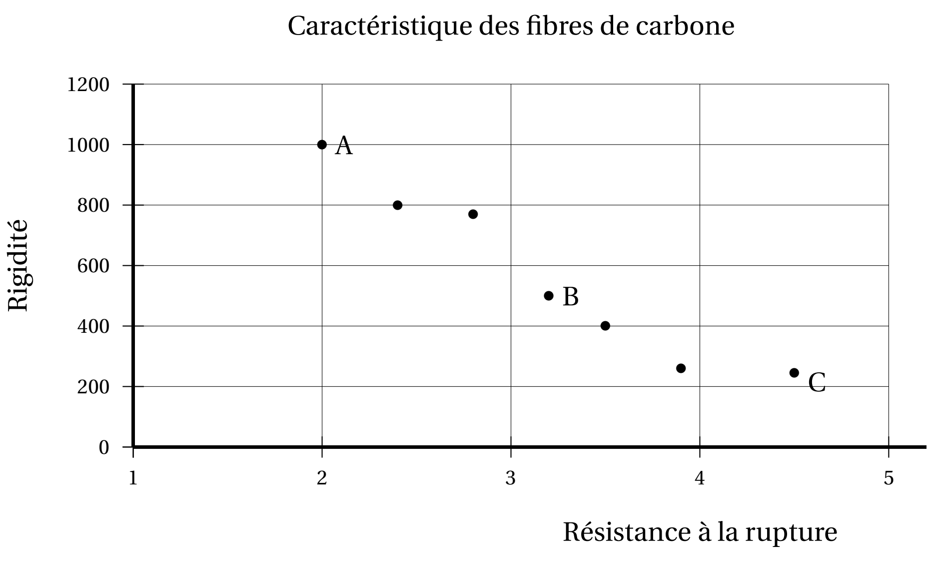
Partie A : deux exemples

Une société produit sept types de fibres de carbone catalogués selon deux caractéristiques :

— leur rigidité, graduée sur une échelle de 1 (le moins rigide) à 1 000 (le plus rigide),

— leur résistance à la rupture, graduée sur une échelle de 1 (le moins résistant) à 5 (le plus résistant).

Le graphique suivant positionne les types de fibres fabriqués par cette société selon leurs caractéristiques.



Les deux questions suivantes sont des questionnaires à choix multiple.

1. Cette société est sollicitée pour la fabrication d'un cadre de vélo de route très rigide destiné à la compétition de haut niveau. Parmi les trois types de fibres suivants, positionnés sur le graphique, quel est le type de fibre à privilégier pour cette commande ?

a. $\boxed{\text{Type A}}$ **b.** Type B **c.** Type C

2. Quel est le type de fibres à choisir si la demande concerne la fabrication d'une canne à pêche destinée aux poissons très combatifs pour lesquels la canne ne doit pas rompre ?

a. Type A **b.** Type B **c.** Type C

Partie B : création d'une nouvelle fibre de type intermédiaire

On veut produire de nouveaux types de fibres aux qualités intermédiaires offrant un compromis entre les deux caractéristiques.
Le tableau suivant donne les caractéristiques des différents types de fibres fabriqués jusqu'à présent par cette société :

Résistance à la rupture x_i	2	2,2	2,8	3,2	3,5	3,9	4,5
Rigidité y_i	1 000	800	750	500	400	280	250

On réalise un ajustement affine du nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$.

1. À l'aide de la calculatrice, on détermine une équation de la droite de régression de y en x : $y = -306{,}44x + 1\,536{,}05$.
   L'arrondi à 0,01 du coefficient de corrélation linéaire associé est égal à $-0{,}96$
2. L'ajustement affine de y en x est donné par l'équation : $y = -306{,}4x + 1\,536{,}1$.
   a. La rigidité, arrondie à l'entier près, que cet ajustement affine permet de prévoir pour une résistance à la rupture égale à 3 est $-306{,}4 \times 3 + 1\,536{,}1$ donc 617.
   b. On détermine la résistance à la rupture correspondant à une rigidité égale à 650 en cherchant x tel que $-306{,}4x + 1\,536{,}1 = 650$:
   $-306{,}4x + 1\,536{,}1 = 650 \iff 1\,536{,}1 - 650 = 306{,}4x \iff \dfrac{1\,536{,}1 - 650}{306{,}4} = x$
   donc la résistance à la rupture, arrondie au dixième, est égale à 2,9.

Partie C : fabrication d'un cadre

La fabrication d'un cadre de vélo de compétition nécessite la cuisson d'un mélange composé d'une fibre de carbone et d'un polymère. Le mélange est porté à une température de 120 °C pendant 1 heure. On laisse ensuite refroidir l'ensemble à une température ambiante de 22 °C.
On appelle f la fonction, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ donnant la température en degré Celsius (°C) du mélange en fonction du temps t exprimé en minute à partir de la mise à température ambiante.
On admet que f est solution de l'équation différentielle suivante : (E) : $y' + 0{,}08y = 1{,}76$
où y désigne une fonction dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et y' sa fonction dérivée.

1. D'après le cours, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 0{,}08y = 0$ est : $\left\{t \longmapsto k\,\mathrm{e}^{-0{,}08t}\right\}$, où k est un réel.
2. On détermine le réel a tel que la fonction g, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = a$, soit une solution particulière de l'équation (E) ; on a donc :
   $g'(t) + 0{,}08g(t) = 1{,}76 \iff 0 + 0{,}08a = 1{,}76 \iff a = \dfrac{1{,}76}{0{,}08} \iff a = 22.$

3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) est donc : $\left\{t \longmapsto k\,\mathrm{e}^{-0,08t} + 22\right\}$, où k est un réel.
4. $f(0) = 120 \iff k\,\mathrm{e}^{0} + 22 = 120 \iff k = 120 - 22 \iff k = 98$
   La solution cherchée est la fonction f définie sur $[0\;;\;+\infty[$ par : $f(t) = 98\,\mathrm{e}^{-0,08t} + 22$.

Dans la suite de l'exercice on considère que, pour tout $t \in [0\;;\;+\infty[$, $f(t) = 98\,\mathrm{e}^{-0,08t} + 22$.

5. Le temps au bout duquel la température du mélange est de 42 °C est la valeur de t telle que $f(t) = 42$; on résout cette équation.
   $$f(t) = 42 \iff 98\,\mathrm{e}^{-0,08t} + 22 = 42 \iff 98\,\mathrm{e}^{-0,08t} = 20 \iff \mathrm{e}^{-0,08t} = \frac{20}{98}$$
   $$\iff -0,08t = \ln\left(\frac{20}{98}\right) \iff t = \frac{\ln\left(\frac{20}{98}\right)}{-0,08}$$
   Or $\dfrac{\ln\left(\frac{20}{98}\right)}{-0,08} \approx 19,87$ donc, en arrondissant à la minute, il faudra 20 minutes pour atteindre la température de 42 °C.

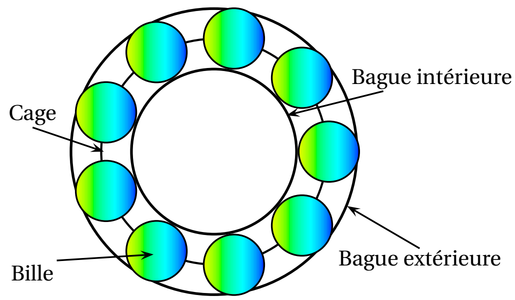
Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants que l'on admet.

$f(t) := 98 * \exp(-0.08 * t) + 22$
$t \mapsto 98\mathrm{e}^{-0,08t} + 22$
Dériver$(f(t), t)$
$t \mapsto -7,84\mathrm{e}^{-0,08t}$
Intégrer$(f(t), t)$
$t \mapsto -1\,225\mathrm{e}^{-0,08t} + 22t$

6. D'après le logiciel de calcul formel : $f'(t) = -7,84\,\mathrm{e}^{-0,08t}$.
   Or pour tout réel T, on a : $\mathrm{e}^{T} > 0$ donc : $f'(t) = -7,84\mathrm{e}^{-0,08t} < 0$.
   La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0\;;\;+\infty[$.
   En effet, plus le temps de refroidissement augmente, plus la température baisse.
7. La température moyenne T_m du mélange durant les 20 premières minutes de refroidissement est la valeur moyenne de la fonction f entre 0 et 20, c'est-à-dire : $\dfrac{1}{20-0}\displaystyle\int_0^{20} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   D'après le logiciel de calcul formel, la fonction f admet pour primitive la fonction F définie par $F(t) = -1\,225\mathrm{e}^{-0,08t} + 22t$. Donc
   $$\int_0^{20} f(t)\,\mathrm{d}t = F(20) - F(0) = \left(-1\,225\mathrm{e}^{-0,08\times 20} + 22\times 20\right) - \left(-1\,225\mathrm{e}^{-0,08\times 0} + 22\times 0\right)$$
   $$= -1\,225\mathrm{e}^{-1,6} + 440 + 1\,225 = -1\,225\mathrm{e}^{-1,6} + 1\,665$$
   On en déduit que $T_m = \dfrac{-1\,225\mathrm{e}^{-1,6} + 1\,665}{20}$ qui a pour valeur arrondie à l'unité 71 °C.

Exercice 2 — 9 points

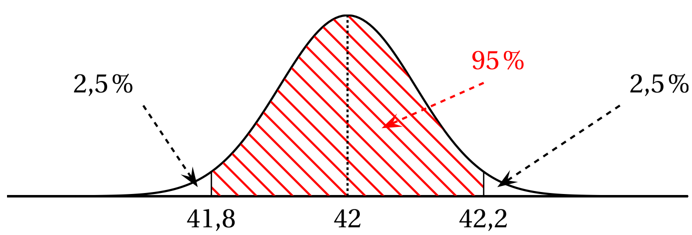
Lors de la conception d'un vélo destiné à la performance, la qualité des roulements à billes intervenant au niveau des moyeux et du pédalier est primordiale. L'apparition des roulements à billes en céramique a permis d'offrir un coefficient de friction réduit et une masse globale plus faible par rapport à des roulements en acier. Leur fragilité, cependant, n'est pas compatible avec la pratique cycliste. Ceci amène finalement à utiliser des roulements hybrides avec des billes en céramique et des bagues en acier.



Partie A : fabrication des bagues

La fabrication des bagues en acier nécessite la production de pièces cylindriques.
On admet que la variable aléatoire D qui mesure le diamètre (en mm) des pièces destinées aux bagues extérieures suit la loi normale de moyenne $\mu = 42$ et d'écart-type $\sigma = 0{,}12$.
Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.
Le contrôle de la fabrication accepte uniquement les pièces dont le diamètre est compris entre 41,8 mm et 42,2 mm.

1. La probabilité qu'une pièce de la production tirée au hasard soit acceptée est $P(41{,}8 \leqslant D \leqslant 42{,}2) \approx 0{,}904$.
2. On souhaite modifier le mode de fabrication pour améliorer le pourcentage de pièces acceptées en conservant la moyenne $\mu = 42$.
   Pour que la probabilité qu'une pièce soit acceptée soit égale à 0,95, il faut que $P(41{,}8 \leqslant D \leqslant 42{,}2) = 0{,}95$.



   D'après les propriétés de la courbe de la loi normale, on peut dire que $P(41{,}8 \leqslant D \leqslant 42{,}2) = 0{,}95$ équivaut à $P(D \leqslant 41{,}8) = 0{,}025$.
   On sait aussi que si D suit la loi normale de paramètres μ et σ, alors la variable aléatoire $\dfrac{D-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
   De plus : $D \leqslant 41{,}8 \iff D - 42 \leqslant -0{,}2 \iff \dfrac{D-42}{\sigma} \leqslant -\dfrac{0{,}2}{\sigma}$, ce qui signifie que
   $P(D \leqslant 41{,}8) = 0{,}025 \iff P\left(\dfrac{D-42}{\sigma} \leqslant -\dfrac{0{,}2}{\sigma}\right) = 0{,}025$.

On cherche donc σ pour que $P\left(\dfrac{D-42}{\sigma} \leqslant -\dfrac{0,2}{\sigma}\right) = 0,025$, sachant que la variable aléatoire $\dfrac{D-42}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
La calculatrice donne $-\dfrac{0,2}{\sigma} \approx -1,959\,964$ donc $\sigma \approx -\dfrac{0,2}{-1,959\,964} \approx 0,102$.
Pour $\sigma = 0,102$, on aura $P(41,8 \leqslant D \leqslant 42,2) \approx 0,95$.

Partie B : contrôle de la production des bagues

On suppose maintenant que 95 % des pièces sont acceptables. On prélève un échantillon de 50 pièces. La production est suffisamment grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 pièces, associe le nombre de pièces non acceptables de l'échantillon.

1. Il y a 95 % des pièces qui sont acceptables, donc 5 % qui ne le sont pas; la probabilité qu'une pièce ne soit pas acceptable est donc $p = 0,05$.
   Une épreuve consiste à prélever une pièce au hasard et il y a deux issues possibles : elle n'est pas acceptable, avec une probabilité de $p = 0,05$, ou elle est acceptable avec une probabilité de $1 - p = 0,95$.
   On répète cette épreuve de façon à obtenir un échantillon de 50 pièces, et la production est suffisamment grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces.
   On peut donc en déduire que la variable aléatoire X qui donne le nombre de pièces non acceptables dans un prélèvement de 50 pièces suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,05$.
2. La probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un échantillon de 50 pièces ne contienne que des pièces acceptables est : $P(X = 0) = \dbinom{50}{0} \times 0,05^0 \times 0,95^{50} = 0,95^{50} \approx 0,077$.
3. La probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'un échantillon de 50 pièces contienne au plus deux pièces non acceptables est : $P(X \leqslant 2) \approx 0,541$.
4. L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = np = 50 \times 0,05 = 2,5$.
   Donc sur un échantillon de 50 pièces, il y en a en moyenne 2,5 qui ne sont pas acceptables.

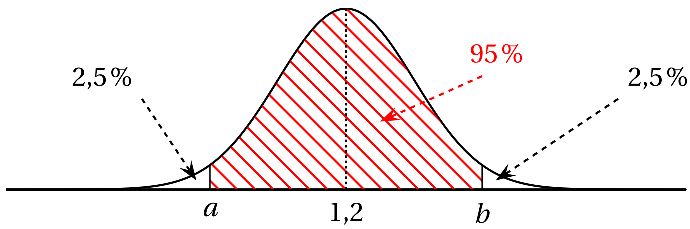
Partie C : contrôle de la production des billes

L'entreprise ne fabrique pas elle-même les billes mais passe commande chez un fournisseur. Pour ce type de roulements, l'entreprise a reçu une livraison d'un grand nombre de billes en nitrure de silicium (Si_3N_4) dont la masse moyenne annoncée par le fournisseur est de 1,2 g. La responsable qualité souhaite contrôler la valeur de la masse moyenne des billes. Elle construit pour cela un test d'hypothèse bilatéral au seuil d'erreur de 5 %. On désigne par $\overline{M}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon aléatoire de 100 billes prélevées dans la livraison, associe la masse moyenne en gramme des billes de cet échantillon. Le nombre de billes livrées est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise.

On admet que $\overline{M}$ suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\sigma_0 = \dfrac{0,03}{\sqrt{100}} = 0,003$.

La responsable choisit comme hypothèse nulle H_0 : « $m = 1,2$ ».
Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

1. On détermine l'intervalle $I = [a\ ;\ b]$ de centre 1,2 tel que, sous l'hypothèse H_0 :
   $P\left(a \leqslant \overline{M} \leqslant b\right) = 0,95$.

   $P\left(a \leqslant \overline{M} \leqslant b\right) = 0,95 \iff P\left(\overline{M} \leqslant a\right) = 0,025$
   La calculatrice donne $a \approx 1,1941$.
   $m - a \approx 0,0059$ et $b = m + 0,0059 = 1,2059$
   Donc $P\left(1,1941 \leqslant \overline{M} \leqslant 1,2059\right) \approx 0,95$.

2. Le test est bilatéral, donc l'hypothèse alternative H_1 est « $m \neq 1,2$ ».

3. La règle de décision permettant d'utiliser ce test est la suivante :

   - on accepte l'hypothèse H_0 au risque de 5 %, si la masse moyenne en gramme d'un échantillon de 100 pièces appartient à l'intervalle $\left[1,1941\ ; 1,2059\right]$;
   - on accepte l'hypothèse H_1 sinon.

4. On prélève un échantillon de 100 billes et on observe que, pour cet échantillon, la masse moyenne est égale à 1,2034 g.
   $1,2034 \in \left[1,1941\ ; 1,2059\right]$ donc on peut, au seuil d'erreur de 5 %, conclure que la masse moyenne des billes de cette livraison est conforme à l'annonce du fournisseur.