Corrigé du BTS Groupement D1 [1] – 15 mai 2023
Métropole – Antilles–Guyane – Polynésie

Durée : 2 heures

EXERCICE 1 **10 points**

Afin de vérifier la bonne isolation thermique d'un spa, on porte la température de l'eau, du spa à 38 °C puis on coupe l'alimentation électrique du spa qui sert à chauffer l'eau. On s'intéresse à l'évolution de cette température en fonction du temps écoulé à partir de cette coupure. La température de l'eau du spa est modélisée par une fonction f qui, à tout temps t (en heures) écoulé depuis la coupure de l'alimentation électrique, associe la température $f(t)$, en degré Celsius (°C), de l'eau du spa au temps t. On admet que $f(0) = 38$.
Lors de cette vérification, la température ambiante extérieure au spa reste constante et égale à 25 °C. On remarque que la température de l'eau du spa est de 37 °C au bout de 1,5 h.

Partie A

On admet que la fonction f est la solution sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ de l'équation différentielle (E) d'inconnue y de la variable réelle t : $y' + 0{,}05y = 1{,}25$, et qui vérifie la condition $f(0) = 38$.

1. L'équation différentielle $ay' + by = 0$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\text{e}^{-\frac{b}{a}t}$ où k est un réel quelconque.

   Donc, sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$, l'équation différentielle $y' + 0{,}05y = 0$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(t) = k\text{e}^{-0{,}05t}$ où k est un réel quelconque.
2. Soit c une fonction constante solution de (E) ; alors sa dérivée est nulle et on a :
   $0 + 0{,}05c = 1{,}25$ donc $c = \dfrac{1{,}25}{0{,}05} = 25$.
3. Les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}05y = 1{,}25$ sont donc les fonctions f définies par $f(t) = k\text{e}^{-0{,}05t} + 25$, où k est un réel quelconque.
4. $f(0) = 38 \iff k\text{e}^0 + 25 = 38 \iff k = 13$

   Donc pour tout réel t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, on a $f(t) = 13\text{e}^{-0{,}05t} + 25$.

Partie B

On admet que, pour tout réel t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $f(t) = 13\text{e}^{-0{,}05t} + 25$.

1. La valeur arrondie à 10^{-1} de $f(24)$ est 28,9

   Cela signifie qu'au bout de 24 heures après la coupure de l'alimentation électrique, la température de l'eau du spa est d'environ 28,9 °C.

1. Analyses de biologie médicale, Bio analyses et contrôles, Biotechnologies, Europlastics et composites, Bioqualité

2. **a.** Pour tout réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $f'(t) = 13 \times (-0{,}05)\mathrm{e}^{-0{,}05t} = -0{,}65\mathrm{e}^{-0{,}05t}$.

   b. Pour tout t, on a $\mathrm{e}^{-0{,}05t} > 0$ donc $f'(t) = -0{,}65\mathrm{e}^{-0{,}05t} < 0$; la fonction f est donc strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   Il semble cohérent que, quand le chauffage du spa est coupé, la température de l'eau diminue.

3. **a.** $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \mathrm{e}^{-T} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}05t} = 0$; on en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 25$.

   b. La fonction f est décroissante et a pour limite 25 donc la température du spa, une fois l'alimentation électrique coupée, va décroitre et tendre vers 25 °C.

4. Une alarme sonore est émise quand la température de l'eau du spa devient strictement inférieure à une température programmée par l'utilisateur.

   a. L'utilisateur programme la température de l'eau du spa à 36 °C.

   On cherche donc t pour que $f(t) < 36$; on résout cette inéquation :

   $$f(t) < 36 \iff 13\mathrm{e}^{-0{,}05t} + 25 < 36 \iff 13\mathrm{e}^{-0{,}05t} < 11 \iff \mathrm{e}^{-0{,}05t} < \frac{11}{13}$$

   $$\iff -0{,}05t < \ln\left(\frac{11}{13}\right) \iff t > -\frac{\ln\left(\frac{11}{13}\right)}{0{,}05}$$

   Or $-\dfrac{\ln\left(\frac{11}{13}\right)}{0{,}05} \approx 3{,}34$ et $\dfrac{34}{100} = \dfrac{20{,}4}{60}$

   Donc l'alarme sonore retentira environ 3 h 20 min après la coupure de l'alimentation électrique.

   b. Soit l'algorithme :

$H \leftarrow 0$
$T \leftarrow 38$
Tant que $T \geqslant 34$
$\quad H \leftarrow H+1$
$\quad T \leftarrow 13\mathrm{e}^{-0{,}05H} + 25$
Fin du tant que
Afficher H

   $f(7) \approx 34{,}16 \geqslant 34$ et $f(8) \approx 33{,}71 < 34$, donc la valeur numérique affichée par cet algorithme est 8.

   c. Cet algorithme permet de déterminer le nombre d'heures qu'il faut après la coupure de l'alimentation électrique pour que la température du spa devienne strictement inférieure à 34 °C.

EXERCICE 2 — 10 points

Une minoterie (établissement qui fabrique des farines de céréales) reçoit chaque jour des camions de blé. Ce blé est destiné à être transformé en farine. La farine fabriquée est ensuite vendue à des boulangers industriels ou à des artisans boulangers.

Partie A

Dans la minoterie, on procède à deux contrôles qualité à l'arrivée d'une livraison de blé : l'un sur l'extensibilité d'une pâte obtenue à partir de la farine fabriquée avec un échantillon du blé livré, l'autre sur le taux d'humidité du blé livré.

1. Un technicien broie une quantité de blé représentatif d'une livraison. Il obtient une farine, avec laquelle il fabrique cinq échantillons de quantité identique de pâte. Il mesure l'indice d'extensibilité, en mm, de chacun de ces échantillons.

   Voici les résultats obtenus :

	Indice d'extensibilité en mm
Échantillon n° 1	104
Échantillon n° 2	81
Échantillon n° 3	83
Échantillon n° 4	57
Échantillon n° 5	55

   a. La moyenne de cette série est $\overline{x} = 76$, et son écart-type arrondi au centième est $\sigma = 18{,}22$.

   b. Dans cette question, on considère que l'écart-type de la série est $\sigma = 18$ mm.

   Le processus qualité impose de procéder à un test sur cinq nouveaux échantillons de pâte si l'une des cinq valeurs de la série précédente est en dehors de l'intervalle $\left[\overline{x} - 2\sigma\ ;\ \overline{x} + 2\sigma\right]$.

   $\left[\overline{x} - 2\sigma\ ;\ \overline{x} + 2\sigma\right] = [76 - 2 \times 18\ ;\ 76 + 2 \times 18] = [40\ ;\ 112]$

   Chacune des valeurs du tableau appartient à cet intervalle, donc le technicien n'a pas besoin de procéder à un test sur cinq nouveaux échantillons de pâte.

2. Deux camions, en provenance d'une même exploitation agricole, sont arrivés. Le technicien utilise un humidimètre qui indique le taux d'humidité, mesuré en pourcentage, du blé livré dans chaque camion :

   — le premier contient 29 540 kg de blé présentant un taux d'humidité global de 12,4 % ;

   — le second contient 14 540 kg de blé présentant un taux d'humidité global de 14,1 %.

   Le cahier des charges exige un taux d'humidité inférieur à 13 % dans un même silo. Lors du déchargement des deux camions dans un même silo, les blés seront mélangés.

   Le taux moyen d'humidité du mélange est : $\dfrac{29\,540 \times \frac{12,4}{100} + 14\,540 \times \frac{14,1}{100}}{29\,540 + 14\,540} \times 100 \approx 12{,}96$.

   Le taux d'humidité est inférieur à 13 %, donc le technicien peut autoriser le déchargement des deux camions dans un même silo vide.

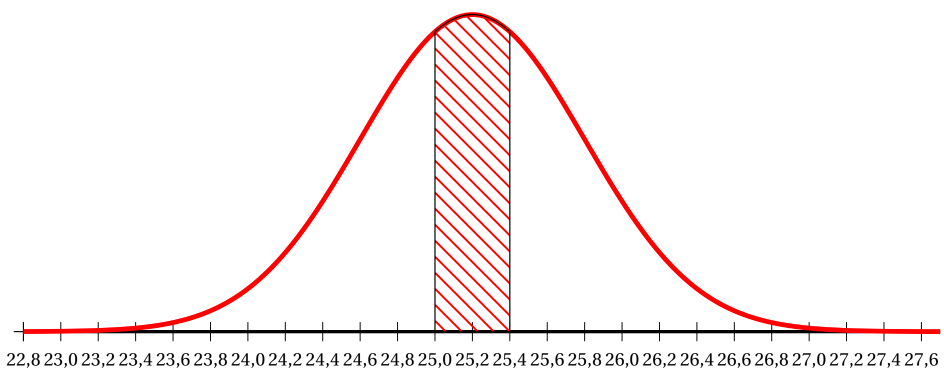
Partie B

La farine fabriquée par la minoterie est conditionnée dans des sacs destinés à être vendus aux boulangers. On note X la variable aléatoire qui, à chaque sac de farine, associe son poids en kg. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 25,2 kg et d'écart-type 0,1. On prélève un sac au hasard dans la production.

1. Un sac ne peut pas être vendu s'il a une masse inférieure à 25 kg.
La probabilité $P(\leqslant 25)$, à 10^{-3} près, pour que ce sac ait une masse inférieure à 25 kg est égale à 0,023.

2. **a.** D'après le cours, $P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \approx 0{,}95$, donc on peut prendre $h = 2\sigma = 0{,}2$ pour que : $P(25{,}2 - h \leqslant X \leqslant 25{,}2 + h) \approx 0{,}95$ à 10^{-2} près.

b. On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction de densité.
On représente $P(25 \leqslant X \leqslant 25{,}4)$ qui est l'aire de la région comprise entre la courbe, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 25$ et $x = 25{,}4$.



Cette zone hachurée ne représente visiblement pas 95 % de l'aire située sous la courbe, donc cette représentation ne peut pas être celle de la fonction de densité de la variable aléatoire X.

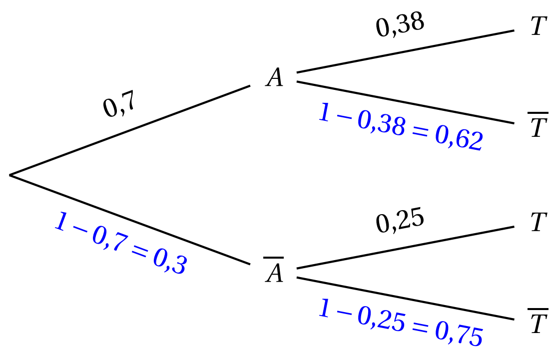
Partie C

Un commercial de la minoterie présente à ses clients une nouvelle farine appelée *La Romaine*. On dispose des données suivantes :

- 70 % des clients de la minoterie sont des artisans boulangers, les autres sont des boulangers industriels;
- parmi les artisans boulangers, 38 % acceptent de tester la farine *La Romaine*;
- parmi les boulangers industriels, 25 % acceptent de tester la farine *La Romaine*.

On choisit un client de la minoterie au hasard.
On note A l'évènement « le client est un artisan boulanger » et T l'évènement « le client accepte de tester la farine *La Romaine* ».

1. On représente la situation décrite par un arbre pondéré.



2. **a.** La probabilité de l'évènement « le client est un artisan boulanger et il accepte de tester la farine *La Romaine* » est : $P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0{,}7 \times 0{,}38 = 0{,}266$.

b. La probabilité de l'évènement « le client accepte de tester la farine *La Romaine* » est $P(T)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$P(T) = P(A \cap T) + P\left(\overline{A} \cap T\right) = 0{,}266 + 0{,}3 \times 0{,}25 = 0{,}341$.

3. Un client ayant testé la farine *La Romaine* reprend contact avec le commercial de la minoterie.

La probabilité que ce soit un artisan boulanger est : $P_T(A) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}266}{0{,}341} \approx 0{,}780$.

4. On choisit au hasard 200 clients de la minoterie. Les clients de la minoterie sont suffisamment nombreux pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note Y la variable aléatoire qui, à un échantillon de 200 clients, associe le nombre de clients qui ont testé la farine *La Romaine*. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres n et p, avec $n = 200$ et $p = 0{,}341$.

a. La probabilité $P(Y \leqslant 60)$, arrondie à 10^{-3}, qu'au plus 60 des 200 clients choisis aient testé la farine *La Romaine* est 0,125.

b. L'espérance de la variable aléatoire Y est $E(Y) = np = 200 \times 0{,}341 = 68{,}2$.

Sur 200 clients, il y en a en moyenne 68,2 qui ont testé la farine *La Romaine*.