∽ Corrigé du baccalauréat Métropole 16 juin 2016 ∾
STI2D–STL spécialité SPCL

EXERCICE 1 — 3 points

1. Un argument du nombre complexe $2+2\,\mathrm{i}$ est égal à :

a. $-\dfrac{\pi}{4}$ **b.** $-\dfrac{9\pi}{4}$ **c.** $2\sqrt{2}$ **d.** $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

$$\left|2+2\,\mathrm{i}\right| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ donc } 2+2\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Réponse d.

2. Le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{15}}$ est égal à :

a. $\boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$ **c.** $0,5+0,866\mathrm{i}$

b. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ **d.** $0,5+0,866\,025\,403\,8\mathrm{i}$

$$\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{5}} \times \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{15}} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\right)} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Réponse a.

3. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_{\mathrm{B}} = \frac{5}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$. Le triangle OAB est :

a. isocèle en O **c.** rectangle et isocèle en B

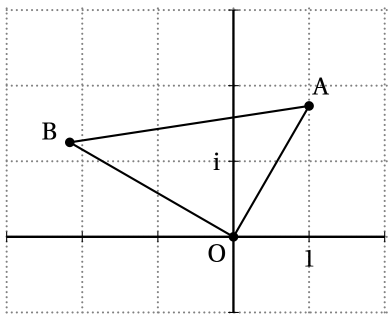
b. $\boxed{\text{rectangle en O}}$ **d.** isocèle en B

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \arg\left(\frac{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{O}}}{z_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{O}}}\right) = \arg\left(\frac{\frac{5}{2}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}}}{2\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}}}\right)$$
$$= \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Donc le triangle OAB est rectangle en O.

$\mathrm{OA} = |z_{\mathrm{A}}| = 2$ et $\mathrm{OB} = |z_5| = \dfrac{5}{2}$ donc $\mathrm{OA} \neq \mathrm{OB}$

Donc le triangle OAB n'est pas isocèle en O.



Réponse b.

4. Pour tout nombre réel θ, le nombre complexe $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}}$ est égal à :

a. $\boxed{2\cos(\theta)}$ **c.** 1

b. $\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta)$ **d.** $2\,\mathrm{i}\,\sin(\theta)$

$$\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta) + \cos(-\theta) + \mathrm{i}\,\sin(-\theta)$$

Or $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ donc :

$$\cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta) + \cos(-\theta) + \mathrm{i}\,\sin(-\theta) = \cos(\theta) + \mathrm{i}\,\sin(\theta) + \cos(\theta) - \mathrm{i}\,\sin(\theta) = 2\cos(\theta)$$

Réponse a.

EXERCICE 2 — 6 points

Un centre de vacances possède une piscine de 600 m^3 soit 600 000 litres. L'eau du bassin contient du chlore qui joue le rôle de désinfectant. Toutefois le chlore se dégrade et 25 % de celui-ci disparaît chaque jour, en particulier sous l'effet des ultra-violets et de l'évaporation. Le 31 mai à 9 h, le responsable analyse l'eau du bassin à l'aide d'un kit distribué par un magasin spécialisé.
Le taux de chlore disponible dans l'eau est alors de 1,25 mg/L (milligrammes par litre).

Document

Réglementation des piscines publiques

Paramètres contrôlés	**Seuils de qualité réglementaire**	**Incidences sur la qualité de l'eau**
Présence de Chlore	Au minimum 2 mg/L	< 2 mg/L : sous chloration Risque de prolifération bactérienne dans l'eau
	Au maximum 4 mg/L	> 4 mg/L : surchloration Irritation de la peau

Source : Agence Régionale de Santé

À partir du 1er juin pour compenser la perte en chlore, la personne responsable de l'entretien ajoute, chaque matin à 9 h, 570 g de chlore dans la piscine.
Pour le bien-être et la sécurité des usagers, le responsable souhaite savoir si cet apport journalier en chlore permettra de maintenir une eau qui respecte la réglementation donnée par l' Agence Régionale de Santé pour les piscines publiques.

Partie A

1. Pour tout entier naturel n on note u_n la quantité de chlore disponible, exprimée en grammes, présente dans l'eau du bassin le n-ième jour suivant le jour de l'analyse, immédiatement après l'ajout de chlore. Ainsi u_0 est la quantité de chlore le 31 mai à 9 h et u_1 est la quantité de chlore le 1er juin à 9 h après l'ajout de chlore.

a. Le 31 mai à 9h, il y a une concentration de chlore de 1,25 mg/L; la piscine contient 600 000 litres, donc la masse de chlore présent dans l'eau est : $1,25\times 600\,000 = 750\,000$ mg soit 750 grammes.
Donc $u_0 = 750$.
La concentration de chlore était de 1,25 mg/L donc inférieure à 2 mg/L, donc le responsable ne pouvait pas donner l'accès à la piscine le 31 mai à 9h.

b. Chaque jour, le chlore perd 25 % de sa masse donc le 1er juin il en reste :
$750 - \dfrac{25}{100}\times 750 = 562,5$ g.
On rajoute tous les matins 570 g de chlore donc $u_1 = 562,5 + 570 = 1\,132,5$.

c. La masse de chlore perd 25 % tous les jours donc elle est multipliée par $1 - \dfrac{25}{100} = 0,75$.
De plus, on rajoute 570 g chaque matin.
Donc on passe de la masse de chlore au jour n à la masse de chlore au jour $n+1$ en multipliant par 0,75 puis en ajoutant 570; autrement dit, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 570$.

d. On calcule $u_2 = 0,75u_1 + 570 = 0,75\times 1\,132,5 + 570 = 1\,419,375$.
$\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1\,419,375}{1132,5} \approx 1,25$; $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1132,5}{750} = 1,51$; $\dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$ donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2. Soit l'algorithme ci-dessous :

Variables	u : un nombre réel N : un nombre entier naturel k : un nombre entier naturel
Initialisation :	Saisir la valeur de N u prend la valeur 750
Traitement :	Pour k allant de 1 à N u prend la valeur $0{,}75u+570$ Fin du Pour
Sortie :	Afficher u

a. Cet algorithme permet de calculer u_N pour N entier naturel.

b. On complète le tableau suivant pour $N = 3$:

Variables	Initialisation	Étape 1	Étape 2	Étape 3
u	750	1 132,5	1 419,375	1 634,531 25

La piscine peut être ouverte s'il y a entre 2 et 4 milligrammes par litre de chlore ; comme la piscine contient 600 000 litres d'eau, il faut une masse de chlore comprise entre $2 \times 600000 = 1200000$ mg et $4 \times 600000 = 2400000$ mg, autrement dit il faut que la masse de chlore soit comprise entre 1 200 et 2 400 grammes.

La piscine pourra donc être ouverte pour $n = 2$ soit le 2 juin à 9 h.

c. La quantité de chlore le 15^e^ jour est $u_{15} \approx 2259{,}554$ grammes (à la calculatrice).

Partie B

Au fil du temps, la quantité de chlore évolue. On note d_n l'écart de quantité de chlore d'un jour à l'autre en grammes. Pour tout entier naturel n, on a $d_n = u_{n+1} - u_n$.

1. a. $d_0 = u_1 - u_0 = 1132{,}5 - 750 = 382{,}5$; $d_1 - = u_2 - u_1 = 1419{,}375 - 1132{,}5 = 286{,}875$;
$d_2 = u_3 - u_2 = 1634{,}53125 - 1419{,}375 = 215{,}15625$

b. $\dfrac{d_2}{d_1} = \dfrac{215{,}15625}{286{,}875} = 0{,}75$ et $\dfrac{d_1}{d_0} = \dfrac{286{,}875}{382{,}5} = 0{,}75$
donc d_0, d_1 et d_2 semblent être les termes d'une suite géométrique de raison 0,75.

2. $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 570 = u_n - 0{,}25u_n + 570$ donc $u_{n+1} - u_n = -0{,}25u_n + 570$.

3. On admet que pour tout entier naturel n, on a $d_{n+1} = 0{,}75d_n$; donc la suite (d_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$ et de premier terme $d_0 = 382{,}5$.

a. La suite (d_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}75$ et de premier terme $d_0 = 382{,}5$ donc, pour tout entier naturel n, on a : $d_n = d_0 \times q^n = 382{,}5 \times 0{,}75^n$.

b. $d_n = 382{,}5 \times 0{,}75^n \iff u_{n+1} - u_n = 382{,}5 \times 0{,}75^n \iff -0{,}25u_n + 570 = 382{,}5 \times 0{,}75^n$
$\iff 570 - 382{,}5 \times 0{,}75^n = 0{,}25u_n \iff 4\left(570 - 382{,}5 \times 0{,}75^n\right) = u_n$
$\iff u_n = 2280 - 1530 \times 0{,}75^n$

c. $-1 < 0{,}75 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0{,}75^n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 2280$

Si le processus se poursuit sur le long terme, la masse de chlore dans la piscine va tendre vers 2 280 grammes, ce qui permet de laisser la piscine ouverte.

EXERCICE 3 — 4 points

Quand l'oreille humaine est soumise à une intensité acoustique, exprimée en watts par mètre carré (W/m^2), le niveau sonore du bruit responsable de cette intensité acoustique est exprimé en décibels (dB).

Document

Échelle de bruit

Sources sonores	Intensité acoustique (W/m^2)	Niveau sonore arrondi éventuellement à l'unité	Sensation auditive
Décollage de la Fusée Ariane	10^6	180	Exige une protection spéciale
Turboréacteur	10^2	140	Exige une protection spéciale
Course de Formule 1	10	130	Exige une protection spéciale
Avion au décollage	1	120	Seuil de douleur
Concert et discothèque	10^{-1}	110	Très difficilement supportable
Baladeur à puissance maximum	10^{-2}	100	Très difficilement supportable
Moto	10^{-5}	70	Pénible à entendre
Voiture au ralenti	10^{-7}	50	Bruit courant
Seuil d'audibilité	10^{-12}	0,08	Silence anormal

1. Quand l'intensité acoustique passe de 1 à 10, le niveau sonore passe de 120 à 130; quand l'intensité passe de 10 à 100, le niveau sonore passe de 130 à 140.

   Il semble donc que quand l'intensité acoustique est multipliée par 10, le niveau sonore augmente de 10.

2. La relation liant l'intensité acoustique x où x appartient à l'intervalle $\left[10^{-12};10^6\right]$ et le niveau sonore est donnée par : $f(x) = \dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(x) + 120$. On pourra prendre $\dfrac{10}{\ln(10)} \approx 4,34$.

   a. $f(10x) = \dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(10x) + 120 = \dfrac{10}{\ln(10)} (\ln(10) + \ln(x)) + 120 =$
   $\dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(10) + \dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(x) + 120 = 10 + f(x)$
   La conjecture émise en question **1.** est donc vérifiée.

   b. L'intensité acoustique d'une moto est de 10^{-5} W/m^2 donc l'intensité acoustique de deux motos est de 2×10^{-5} W/m^2.

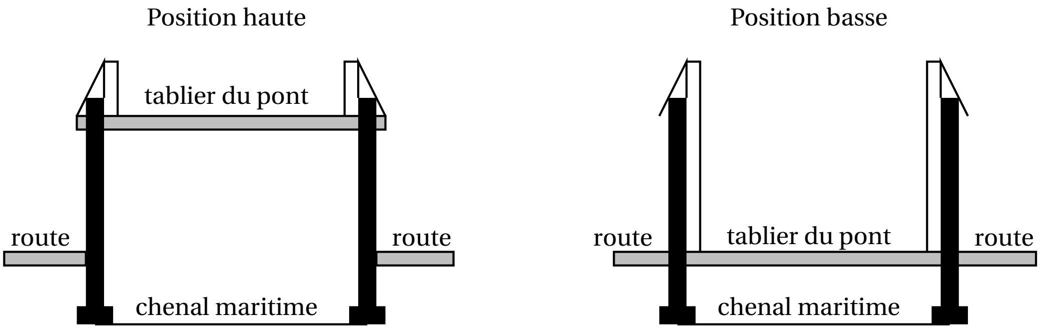
   Le niveau sonore de deux motos est donc : $f\left(2 \times 10^{-5}\right) \approx 73$ dB.

3. Pour éviter tout risque sur la santé, le port d'un casque de protection acoustique est donc conseillé au delà de 85 dB. L'intensité acoustique à partir de laquelle le port d'un tel casque est conseillé est le nombre x solution de l'inéquation $f(x) > 85$; on résout cette inéquation :
   $f(x) > 85 \iff \dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(x) + 120 > 85 \iff \dfrac{10}{\ln(10)} \times \ln(x) > -35 \iff$
   $\ln(x) > -35 \times \dfrac{\ln(10)}{10} \iff x > \mathrm{e}^{-35 \times \frac{\ln(10)}{10}}$

   $\mathrm{e}^{-35 \times \frac{\ln(10)}{10}} \approx 3,2 \times 10^{-4}$ donc à partir d'une intensité de $3,2 \times 10^{-4}$ W/m^2, le port d'un casque est conseillé.

EXERCICE 4 **6 points**

Les parties A et B sont indépendantes.
Un pont levant enjambant un canal peu fréquenté est constitué d'un tablier qui, une fois relevé, permet le passage de bateaux de différentes tailles.



Hauteur du tablier en position haute : 7 mètres
Longueur du tablier : 30 mètres
Temps de montée du tablier : 2 minutes
Temps en position haute du tablier (hors incident) : 8 minutes
Temps de descente du tablier : 2 minutes

Partie A - Sur la route

Un automobiliste se présente devant le pont. Le tablier du pont est *en position haute.* On s'intéresse ici au temps d'attente D, exprimé en minutes, de l'automobiliste avant qu'il puisse franchir le canal, pont baissé (hors incident).

1. • Si le tablier se met à descendre dès que la voiture s'arrête, le temps d'attente sera de 2 minutes.
   • Si le tablier arrive en position haute au moment où la voiture s'arrête, le temps d'attente sera de $8+2=10$ minutes.

   Le temps minimum d'attente d'un automobiliste quand le tablier est en position haute, est donc de 2 minutes, le temps maximum de 10 minutes.
2. On admet que le temps d'attente, en minutes, de l'automobiliste pour franchir le pont est une variable aléatoire D qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2~;~10]$.
   D'après le cours : $E(D)=\dfrac{2+10}{2}=6$. Le temps d'attente moyen d'un automobiliste est de 6 minutes.
3. La probabilité que le temps d'attente de l'automobiliste ne dépasse pas 5 minutes est :
   $P(D\leqslant 5)=\dfrac{5-2}{10-2}=\dfrac{3}{8}=0{,}375$.

Partie B - Sur l'eau

Lorsqu'un bateau est passé, le tablier du pont revient en position basse. Le temps, exprimé en heures, avant que le bateau suivant se présente devant le pont est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}05$. Ce temps est appelé temps de latence.

1. $E(T)=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{0{,}05}=20$. Cela signifie que le temps moyen de latence est de 20 heures.
2. On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(x)=0{,}05\,\mathrm{e}^{-0{,}05x}$.

   a. Soit F la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $F(x)=-\,\mathrm{e}^{-0{,}05x}$.
   $F'(x)=-(-0{,}05)\,\mathrm{e}^{-0{,}05x}=0{,}05\,\mathrm{e}^{-0{,}05x}=f(x)$ donc F est une primitive de f sur $[0~;~+\infty[$.

b. On rappelle que pour tout nombre réel t de $[0~;~+\infty[$, $P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

$P(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_0^t = F(t) - F(0) = -0{,}05\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} - \left(-0{,}05\,\mathrm{e}^{0}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}05t}$.

3. a. La probabilité que le temps de latence soit inférieur à 12 heures est :
$P(T \leqslant 12) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}05\times 12} = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 0{,}45$.

b. La probabilité que le temps de latence soit supérieur à un jour est :
$P(T > 24) = 1 - P(T \leqslant 24) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}05\times 24}\right) = \mathrm{e}^{-1{,}2} \approx 0{,}30$.

c. En utilisant l'événement contraire : $P(12 \leqslant T \leqslant 24) = 1 - (P(T < 12) + P(T > 24))$
$= 1 - (0{,}45 + 0{,}30) = 0{,}25$.